Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

SVOČ 2009

Josef Janák

Frakcionální Ornsteinův-Uhlenbeckův proces

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí práce: doc. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., MÚ AVČR

Studijní program: Matematika, Teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy

2009

1 Úvod

Tématem této práce je frakcionální Ornsteinův-Uhlenbeckův proces v konečněrozměrných prostorech. Tedy řešení lineární stochastické diferenciální rovnice, ve které namísto standardního Wienerova procesu vystupuje frakcionální Brownův pohyb (fBp), jenž je jeho zobecněním. Definici a základní vlastnosti (fBp), stejně jako zavedení stochastického kalkulu pro (fBp) lze nalézt například v [2] nebo v [6].

Ve 2. kapitole se zabýváme lineární stochastickou rovnicí. Studujeme existenci a jednoznačnost řešení, stejně tak jako jeho základní vlastnosti. Dále zavádíme pojem limitní míry, ke které řešení lineární rovnice slabě konvergují.

Ve 3. kapitole definujeme pojem gaussovského mostu, tedy procesu spojujícího počáteční bod v čase 0 s daným koncovým bodem v čase T. Nalezneme jeho reprezentaci a odvodíme vztah pro gaussovský most řízený Ornsteinovým-Uhlenbeckovým procesem. Pro tuto část jsme převážně čerpali z [1].

V 4. kapitole uvádíme věty o ergodicitě, díky kterým můžeme odhadovat neznámé parametry ve stochastických rovnicích. V poslední 5. kapitole použijeme předešlé poznatky k odhadu neznámého parametru ve stochastické rovnici kmitání oscilátoru.

Kapitola 5 společně s reprezentací Ornsteinova-Uhlenbeckova mostu představují původní výsledky této práce.

2 Lineární stochastická rovnice

Definice a základní vlastnosti stochastického integrálu vůči frakcionálnímu Brownovu pohybu jsou uvedeny v [2] a [6].
Uvažujme následující rovnici

$$dX_t = AX_t\,dt + \Phi\,dB_t^H, \quad X_0 = x_0 \tag{1}$$

s koeficienty $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times m}$, s počátečním stavem $x_0 \in \mathbb{R}^n$, kde B_t^H je frakcionální Brownův pohyb s hodnotami v $\mathbb{R}^m$ a Hurstovým parametrem $H > \frac{1}{2}$.
Řešením rovnice (1) na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, na kterém je definován $\mathbb{R}^n$-hodnotový (fBp) B_t^H, nazveme spojitý proces $(X_t, t \geq 0)$,

pro který platí rovnice

$$X_t = x_0 + \int_0^t AX_s\, ds + \Phi B_t^H, \quad t \geq 0 \quad \mathbb{P} - s.j. \tag{2}$$

Ukážeme (viz věta 2.2), že proces

$$X_t = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\Phi\, dB_s^H, \quad t \geq 0$$

je jediným řešením rovnice (1). Tento předpis je analogií formule pro variaci konstant a pro $H = 1/2$ definuje Ornsteinův-Uhlenbeckův proces, o kterém víme, že řeší naši rovnici (1), ve které $H = 1/2$ ($B^{1/2}$ je Wienerův proces). Proces X_t je zřejmě dobře definovaný, neboť pro každé t je integrand spojitá funkce. Podívejme se na jeho základní vlastnosti.

Věta 2.1. *Proces definovaný v (2) má spojitou modifikaci, je gaussovský, se střední hodnotou $e^{At}x_0$ a kovariancí*

$$Q_{t,s} = \int_0^s \int_0^t e^{Au}Qe^{A^Tv}\phi(t-s+u-v)\, dudv, \tag{3}$$

pro $s, t \geq 0$, $Q \stackrel{\text{def}}{=} \Phi\Phi^T$ a $\phi(u) \stackrel{\text{def}}{=} H(2H-1)|u|^{2H-2}$.

Důkaz. Proces je zřejmě gaussovský s uvedenou střední hodnotou. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\langle Q_{s,t}x, y\rangle = \mathbb{E}\left\langle e^{A^Ts}x, \int_0^s e^{-Au}\Phi\, dB_u^H\right\rangle \left\langle e^{A^Tt}y, \int_0^t e^{-Av}\Phi\, dB_v^H\right\rangle.$$

Po úpravách se tento výraz dále rovná

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \int_0^t \left\langle e^{-Av}\Phi\left(e^{-Au}\Phi\right)^T e^{A^Ts}x, e^{A^Tt}y\right\rangle \phi(u-v)\, dudv \\
&= \int_0^s \int_0^t \left\langle e^{A(t-v)}Qe^{A^T(s-u)}x, y\right\rangle \phi(u-v)\, dudv \\
&= \int_0^s \int_0^t \left\langle e^{Av}Qe^{A^Tu}x, y\right\rangle \phi(t-s+u-v)\, dudv.
\end{aligned}$$

Nyní dokážeme existenci spojité modifikace. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $n \leq s < t \leq n+1$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|X_t - X_s|^2 \\
\leq &2|e^{At}x_0 - e^{As}x_0|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t e^{A(t-u)}\Phi\, dB_u^H - \int_0^s e^{A(s-u)}\Phi\, dB_u^H\right|^2 = J_1 + J_2
\end{aligned}$$

Existují konstanty K, K_1 a K_2 takové, že

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \left(K|x_0||A|e^{|A|}(t-s)\right)^2 \leq K_1(t-s)^{2H} \\
J_2 &= 2\mathbb{E}\left|\int_0^s e^{A(t-u)} - e^{A(s-u)}\Phi\, dB_u^H + \int_s^t e^{A(t-s)}\Phi\, dB_u^H\right|^2 \\
&\leq 4\mathbb{E}\left|\left(e^{A(t-s)} - I\right)\int_0^s e^{A(s-u)}\Phi\, dB_u^H\right|^2 + 4\mathbb{E}\left|\int_s^t e^{A(t-u)}\Phi\, dB_u^H\right|^2 \\
&\leq 4\left(|A|e^{|A|}(t-s)\right)^2\ \mathrm{Tr}\int_0^s\int_0^s e^{Au}Qe^{A^Tv}\phi(u-v)\, dudv \\
&+ 4\ \mathrm{Tr}\int_s^t\int_s^t e^{Au}Qe^{A^Tv}\phi(u-v)\, dudv \\
&\leq 4|A|e^{2|A|}\sup_{s\in[n,n+1]}|\mathrm{Tr}\ Q_s|(t-s)^{2H} + 4\ \mathrm{Tr}\sup_{n\leq u,v\leq n+1}|e^{Au}Qe^{A^Tv}|(t-s)^{2H} \\
&\leq K_2(t-s)^{2H}
\end{aligned}$$

Podle Kolmogorovovy-Čencovovy věty tedy existuje spojitá modifikace X_t^n procesu X_t pro $t \in [n, n+1]$. Existují tedy množiny $U_n, n \in \mathbb{N}$ takové, že

$$X_{n+1}^n(\omega) = X_{n+1}(\omega) = X_{n+1}^{n+1}(\omega), \quad \omega \in \Omega \setminus U_n,\ \mathbb{P}(U_n) = 0.$$

Pak zřejmě $\mathbb{P}(\cup_{n=0}^\infty)U_n = 0$ a pro $\omega \in \Omega \setminus \cup_{n=0}^\infty U_n$ je proces $\tilde{X}_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_t^n(\omega)$ pro $t \in [n, n+1]$ spojitá modifikace X_t (nadále tuto modifikaci budeme značit X_t). □

Věta 2.2. *Proces*

$$X_t = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\Phi\, dB_s^H, \quad t \geq 0 \tag{4}$$

je řešením rovnice (1). *Řešení je $\mathbb{P} - s.j.$ jednoznačně určeno a je tedy dáno předchozím vztahem.*

Důkaz. Ověříme, že proces (4) splňuje rovnici (2). Při výpočtu použijeme integraci per partes (viz [2, 6]) a Fubiniovu větu.

$$\begin{aligned}
&\int_0^t AX_s\,ds = \int_0^t A\left(e^{As}x_0 + \int_0^s e^{A(s-r)}\Phi dB_r^H\right)ds\\
&= \int_0^t \frac{d}{ds}e^{As}x_0\,ds + \int_0^t\int_0^s -\frac{d}{dr}e^{A(s-r)}\Phi\,dB_r^H ds\\
&\overset{\text{s.j.}}{=} e^{At}x_0 - x_0 + \int_0^t \left[-\frac{d}{dr}e^{A(s-r)}\Phi\,B_r^H\right]_{r=0}^s ds\\
&\quad + \int_0^t\int_0^s \frac{d^2}{dr^2}e^{A(s-r)}\Phi B_r^H\,drds\\
&= e^{At}x_0 - x_0 + \int_0^t A\Phi B_s^H\,ds + \int_0^t\int_r^t \frac{d^2}{ds^2}e^{A(s-r)}\,ds\,\Phi B_r^H\,dr
\end{aligned} \tag{5}$$

Poslední integrál na pravé straně je roven

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[\frac{d}{ds}e^{A(s-r)}\right]_{s=r}^t \Phi B_r^H\,dr = \int_0^t \left(Ae^{A(t-r)} - A\right)\Phi B_r^H\,dr\\
&\overset{\text{s.j.}}{=} \left[-e^{A(t-r)}\Phi B_r^H\right]_{r=0}^t + \int_0^t e^{A(t-r)}\Phi\,dB_r^H - \int_0^t A\Phi B_r^H\,dr\\
&= -\Phi B_t^H + \int_0^t e^{A(t-r)}\Phi\,dB_r^H - \int_0^t A\Phi B_r^H\,dr
\end{aligned} \tag{6}$$

Celkově máme

$$\begin{aligned}
\int_0^t AX_s\,ds &\overset{\text{s.j.}}{=} e^{At}x_0 - x_0 - \Phi B_t^H + \int_0^t e^{A(t-s)}\Phi\,dB_r^H\\
&= X_t - x_0 - \Phi B_t^H
\end{aligned} \tag{7}$$

a X_t je tedy řešením. Nechť Y_t je jiné řešení. Pak

$$|X_t - Y_t| = \left|\int_0^t A(X_s - Y_s)\,ds\right| \le \int_0^t |A||X_s - Y_s|\,ds \quad \text{pro } t \ge 0 \quad \mathbb{P} - s.j.$$

a podle Gronwallova lematu tedy $\mathbb{P}\left[|X_t - Y_t| = 0,\, t \ge 0\right] = 1$. □

V případě, kdy je matice A negativně definitní, existuje limitní míra, ke které řešení rovnice (1) slabě konvergují.

Věta 2.3. *Označme* $\mu_t^x = Law(X_t^x)$ *rozdělení řešení rovnice* (1) *splňující* $X_0^x = x$. *Je-li* A *negativně definitní, pak matice*

$$Q_\infty = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{Au} Q e^{A^T v} \phi(u-v)\, du dv$$

je dobře definovaná a je-li μ_∞ *gaussovská míra* $\mu_\infty = N(0, Q_\infty)$, *pak*

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t^x = \mu_\infty, \quad \textit{slabě}$$

pro každou počáteční podmínku x.

Důkaz. Z negativní definitnosti A plyne existence konstant $M, \omega > 0$ takových, že

$$\left| e^{At} \right| \leq M e^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Pro $t > 0$ je

$$Z(t) := \int_0^t e^{Au} \Phi\, dB^H(u)$$

náhodný vektor s rozdělením $\mu_t = N(0, Q_t)$, kde Q_t je kovarianční matice z věty 2.1 (tedy $e^{At} + Z(t)$ má pro každé $t \geq 0$ stejné rozdělení jako řešení X_t rovnice (1), viz (4)). Nyní ukážeme, že $(Z(t), t \geq 0)$ konverguje v $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ pro $t \to \infty$. Nechť $t > s \geq 1$. Existuje konstanta K (v každém řádku se může měnit) taková, že

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|Z(t) - Z(s)|^2 &= \mathbb{E} \left| \int_s^t e^{Au} \Phi\, dB^H(u) \right|^2 \\
&= \operatorname{Tr} \int_s^t \int_s^t e^{Au} Q e^{A^T v} \phi(u-v)\, du dv \\
&\leq \int_s^t \int_s^t |e^{Au}\Phi|^2 |e^{A^T v}\Phi|^2 \phi(u-v)\, du dv \\
&\leq K \int_s^\infty \int_s^\infty e^{-\omega u} e^{-\omega v} \phi(u-v)\, du dv \\
&= 2K \int_s^\infty \int_s^v e^{-\omega u} e^{-\omega v} \phi(u-v)\, du dv \\
&\leq K \int_s^\infty e^{-\omega v} \int_s^v e^{-\omega u} (v-u)^{2H-2}\, du dv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K \int_s^\infty e^{-\omega v} v^{2H-1} \int_0^1 (1-u)^{2H-2}\, du dv \\
&\leq K \int_s^\infty e^{-\omega v} v^{2H-1}\, dv.
\end{aligned}
$$

Poslední integrál na pravé straně zřejmě konverguje k 0 pro $s \to \infty$. Proto $(Z(t), t \geq 1)$ je cauchyovská v $L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ a existuje náhodný vektor $Z(\infty)$ takový, že $Z(t) \to Z(\infty)$ v $L^2(\Omega)$. Rozdělení $Z(\infty)$ je $\mu_\infty = N(0, Q_\infty)$, protože $Q_t \to Q_\infty$. Pro $x \in \mathbb{R}^n$ a $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ omezenou lipschitzovsky spojitou funkci platí

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu_t^x - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\mu_\infty \right| &= |\mathbb{E}\varphi(e^{At}x + Z(t)) - \mathbb{E}\varphi(Z(\infty))| \\
&\leq k_\varphi(|e^{At}x| + \mathbb{E}|Z(t) - Z(\infty)|) \\
&\leq k_\varphi \left(M|x|e^{-\omega t} + \left(\mathbb{E}|Z(t) - Z(\infty)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)
\end{aligned}
$$

kde k_φ je lipschitzovská konstanta φ. Odtud již plyne slabá konvergence. $\square$

Poznámka. Jsou-li splněny předpoklady věty 2.3 a je-li navíc $H = \frac{1}{2}$, pak

$$
Q_\infty = \int_0^\infty e^{At} Q e^{A^T t}\, dt.
$$

3 Ornsteinův-Uhlenbeckův most

3.1 Motivace

Uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nechť X je spojitý gaussovský proces takový, že $X_0 = 0$ a $\mathbb{E}(X_t) = 0$. Zvolme $T > 0$ a definujme X-most $U^{T,0}$ předpisem

$$
U_t^{T,0} = X_t - \frac{t}{T} X_T. \tag{8}
$$

Je zřejmé, že proces $U^{T,0}$ je gaussovský. Je mostem ve smyslu $U^{T,0} = U_T^{T,0} = 0$. Pokud X je stardardní Brownův pohyb, je známo, že pravděpodobnostní rozdělení procesu $U^{T,0}$ definovaného v (8) je stejné jako podmíněné rozdělení standardního Brownova pohybu

$$
\mathbb{P} - \mathrm{Law}((X_t)_{0 \leq t \leq T} | X_T = 0) = \mathbb{P} - \mathrm{Law}((U_t^{T,0})_{0 \leq t \leq T}).
$$

Nicméně definujeme-li most pro obecný gaussovský proces vztahem (8), nezískáme pro jeho rozdělení předchozí rovnost.

3.2 Definice X-mostu a jeho reprezentace

Definice 1. Nechť X je gaussovský stochastický proces splňující $X_0 = x_0$. Pak gaussovský proces $X^{T,\theta}$ je X-most z $(0, x_0)$ do (T, θ), pokud platí

$$\mathbb{P} - \mathrm{Law}(X^{T,\theta}) = \mathbb{P}^{T,\theta} - \mathrm{Law}(X), \tag{9}$$

kde míra $\mathbb{P}^{T,\theta}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ je definována

$$\mathbb{P}^{T,\theta} = \mathbb{P}(\,\cdot\,|X_T = \theta). \tag{10}$$

Poznámka. Předchozí definice předpokládá, že proces $X^{T,\theta}$ existuje v prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Navíc platí

$$1 = \mathbb{P}(X_T = \theta|X_T = \theta) = \mathbb{P}^{T,\theta}(X_T = \theta) = \mathbb{P}(X_T^{T,\theta} = \theta),$$

jak očekáváme. Všimněme si, že v (10) podmiňujeme jevem nulové míry. Avšak (10) můžeme definovat jako regulární podmíněné rozdělení v polském prostoru spojitých funkcí na $[0, T]$ (viz Shiryaev [5]).

Lemma 3.1. *Nechť X a Y jsou sdruženě gaussovské náhodné vektory s hodnotami v $\mathbb{R}^n$. Nechť X a Y mají střední hodnotu 0. Označme C_X kovarianci vektoru X, C_Y kovarianci vektoru Y a C_{XY} křížovou kovarianci vektorů X a Y. Nechť C_X je regulární matice. Pak podmíněné rozdělení Y při daném X je gaussovské se střední hodnotou*

$$\mathbb{E}[Y|X] = C_{XY} C_X^{-1} X \tag{11}$$

a kovariancí

$$C_{Y|X} = C_Y - C_{XY} C_X^{-1} C_{YX}. \tag{12}$$

Má-li X střední hodnotu m_X a Y střední hodnotu m_Y, pak

$$\mathbb{E}[Y|X] = m_Y - C_{XY} C_X^{-1}(m_X - X) \tag{13}$$

a podmíněná kovariance se nezmění.

Důkaz. Důkaz lze najít například v [4]. □

Věta 3.2. *Nechť X je gaussovský proces se střední hodnotou $\mu(t)$ a kovariancí Q_t. Označme $Q_{T,t} = \mathrm{cov}(\mathrm{X_T}, \mathrm{X_t})$ a $Q_t = \mathrm{cov}(\mathrm{X_t}, \mathrm{X_t}) = \mathrm{var}\,\mathrm{X_t}$. Pak X-most $X^{T,\theta}$ z $(0, \mu(0))$ do (T, θ) má následující reprezentaci*

$$X_t^{T,\theta} = X_t - Q_{T,t} Q_T^{-1}(X_T - \theta). \tag{14}$$

Navíc platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^{T,\theta}) &= \mu(t) - Q_{T,t} Q_T^{-1}(\mu(T) - \theta) \\ \mathrm{cov}(\mathrm{X_t^{T,\theta}}, \mathrm{X_s^{T,\theta}}) &= Q_{t,s} - Q_{T,s} Q_T^{-1} Q_{T,t}. \end{aligned}$$

Důkaz. Proces $X_t^{T,\theta}$ definovaný v (14) má zřejmě uvedenou střední hodnotu a pro jeho kovarianci platí

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X_t^{T,\theta}, X_s^{T,\theta}) &= \mathrm{cov}(X_t - Q_{T,t} Q_T^{-1} X_T, X_s - Q_{T,s} Q_T^{-1} X_T) \\ &= Q_{t,s} - Q_{T,s} Q_T^{-1} Q_{T,t} - Q_{T,t} Q_T^{-1} Q_{T,s} + Q_{T,t} Q_T^{-1} Q_{T,s} Q_T^{-1} Q_T \\ &= Q_{t,s} - Q_{T,s} Q_T^{-1} Q_{T,t}. \end{aligned}$$

Položíme-li v lemmatu 3.1 $Y = X_t$, $C_Y = Q_t$, $X = X_T$, $C_X = Q_T$, $C_{XY} = Q_{T,t}$ získáme stejné výsledky. Rozdělení procesu $X_t^{T,\theta}$ je tedy stejné jako podmíněné rozdělení procesu X_t za podmínky X_T. □

Zkonstruujeme X-most, kde X je Ornsteinův-Uhlenbeckův proces, tedy řešení rovnice (1)

$$dX_t = AX_t\,dt + \Phi\,dB_t^H, \quad X_0 = x_0$$

Podle věty 2.2 je řešením této rovnice proces (4)

$$X_t^{x_0} = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\Phi\,dB_s^H, \quad t \geq 0$$

Podle věty 2.1 má tento proces následující střední hodnotu a kovarianci

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{At}x_0 \\ Q_{t,s} &= \int_0^s \int_0^t e^{Au} Q e^{A^T v} \phi(t - s + u - v)\,dudv \\ Q_t &= \int_0^t \int_0^t e^{Au} Q e^{A^T v} \phi(u - v)\,dudv \end{aligned}$$

Je-li Q_T regulární matice, můžeme předchozí vztahy dosadit do (14) ve větě 3.2 a získáme pro Ornsteinův-Uhlenbeckův most reprezentaci

$$\begin{aligned}
X_t^{T,\theta} &= X_t - Q_{T,t}Q_T^{-1}(X_T - \theta) \\
&= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\Phi dB_s^H - \left(\int_0^t \int_0^T e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(T-t+u-v)\,dudv\right) \\
&\times \left(\int_0^T \int_0^T e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(u-v)\,dudv\right)^{-1} \left(e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-s)}\Phi dB_s^H - \theta\right)
\end{aligned}$$

Navíc platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t^{T,\theta}) &= \mu(t) - Q_{T,t}Q_T^{-1}(\mu(T) - \theta) \\
&= e^{At}x_0 - \left(\int_0^t \int_0^T e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(T-t+u-v)\,dudv\right) \\
&\times \left(\int_0^T \int_0^T e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(u-v)\,dudv\right)^{-1} \left(e^{AT}x_0 - \theta\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_t^{T,\theta}, X_s^{T,\theta}) &= Q_{t,s} - Q_{T,s}Q_T^{-1}Q_{T,t} \\
&= \int_0^s \int_0^t e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(t-s+u-v)\,dudv \\
&- \left(\int_0^s \int_0^T e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(T-s+u-v)\,dudv\right) \\
&\times \left(\int_0^T \int_0^T e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(u-v)\,dudv\right)^{-1} \\
&\times \left(\int_0^t \int_0^T e^{Au}Qe^{A^T v}\phi(T-t+u-v)\,dudv\right).
\end{aligned}$$

Předchozí výrazy v této obecnosti nejspíš nelze zjednodušit, ale ve speciálních případech ano. Uvažujeme-li rovnici (1) jednorozměrnou (tedy $n = m = 1$) a položíme-li $A = 0$ a $\Phi = 1$ s počátečním stavem $x_0 = 0$, je jejím řešením přímo frakcionální Brownův pohyb startující v bodě 0, pro jehož střední hodnotu a kovarianci platí

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= 0 \\
Q_{t,s} &= \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}}{2} \\
Q_t &= t^{2H}
\end{aligned}$$

Použitím předchozích vztahů získáme reprezentaci pro jednorozměrný frakcionální Brownův most

$$
\begin{aligned}
B_t^{T,\theta} &= B_t^H - Q_{T,t}Q_T^{-1}(B_T^H - \theta) \\
&= B_t^H - \frac{T^{2H} + t^{2H} - |T-t|^{2H}}{2T^{2H}}(B_T^H - \theta) \\
\mathbb{E}(B_t^{T,\theta}) &= \mu(t) - Q_{T,t}Q_T^{-1}(\mu(T) - \theta) \\
&= \frac{T^{2H} + t^{2H} - |T-t|^{2H}}{2T^{2H}}\theta \\
\operatorname{cov}(B_t^{T,\theta}, B_s^{T,\theta}) &= Q_{t,s} - Q_{T,s}Q_T^{-1}Q_{T,t} \\
&= \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}}{2} - \\
&- \frac{(T^{2H} + s^{2H} - |T-s|^{2H})(T^{2H} + t^{2H} - |T-t|^{2H})}{4T^{2H}}
\end{aligned}
$$

Narozdíl od možné definice pomocí (8) je tato reprezentace pro jednorozměrný frakcionální Brownův most správná (viz například [1]). Odvozený vzorec pro Ornsteinův-Uhlenbeckův most je tedy zobecněním tohoto případu frakcionálního Brownova mostu.

4 Odhady parametrů na základě vět o ergodicitě

Důkazy vět v následující kapitole jsou technicky náročné a mohou být nalezeny v [3]. Pro některé z těchto vět využijeme následující předpoklad.

Předpoklad (A1). *Nechť $(e^{At}, t \geq 0)$ je exponenciálně stabilní, tj. existují konstanty $M > 0$ a $\varrho > 0$ takové, že pro všechna $t \geq 0$ platí*

$$|e^{At}| \leq Me^{-\varrho t},$$

pak podle věty 2.3 existuje limitní míra $\mu_\infty = N(0, Q_\infty)$ pro $(X_t, t \geq 0)$ taková, že

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t^{x_0} = \mu_\infty, \quad \textit{slabě}$$

pro každou počáteční podmínku $x_0 \in \mathbb{R}^n$, kde $\mu_t^{x_0} = Law(X_t^{x_0})$.

Věta 4.1. *Platí-li (A1), existuje striktně stacionární řešení rovnice* (1), *tj. existuje* $\tilde{x}$ *takové, že* $(X_t^{\tilde{x}}, t \geq 0)$ *je striktně stacionární proces s rozdělením* μ_∞.

Věta 4.2 (Birkhoffova)**.** *Nechť* $(X_t^{\tilde{x}}, t \geq 0)$ *je* $\mathbb{R}^n$*-hodnotový striktně stacionární proces na* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Pak pro každou měřitelnou funkci* $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *splňující* $\mathbb{E}|\varrho(\tilde{x})| < \infty$ *existuje měřitelná funkce* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(X_t^{\tilde{x}})\, dt = \xi \quad \mathbb{P} - s.j. \tag{15}$$

Definice 2. Říkáme, že $\mathbb{R}^n$-hodnotový striktně stacionární proces $(X_t, t \geq 0)$ je ergodický, jestliže ξ v (15) nezávisí na $\omega \in \Omega$, t.j. ξ je deterministická a $\xi = \mathbb{E}\varrho(\tilde{x})$.

Věta 4.3. *Nechť* $(X_t, t \geq 0)$ *je* $\mathbb{R}$*-hodnotový striktně stacionární centrovaný gaussovký proces s autokovarianční funkcí* $R(t) := \mathbb{E}X_0X_t$. *Je-li* $\lim_{t\to\infty} R(t) = 0$, *pak je proces* X_t *ergodický.*

Věta 4.4. *Nechť* $(X_t^{\tilde{x}}, t \geq 0)$ *je* $\mathbb{R}^n$*-hodnotové řešení rovnice* (1). *Nechť* $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je měřitelná funkce splňující* $\mathbb{E}|\varrho(\tilde{x})| < \infty$. *Pak platí*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(X_t^{\tilde{x}})\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\, \mu_\infty(dy) \quad \mathbb{P} - s.j.$$

Věta 4.5. *Nechť platí (A1) a nechť* $(X_t^{x_0}, t \geq 0)$ *je řešení* (1). *Nechť* $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *splňuje následující lokální Lipschitzovu podmínku: existují reálné konstanty* $K > 0$ *a* $l \geq 1$ *takové, že*

$$|\varrho(x) - \varrho(y)| \leq K|x - y|_{\mathbb{R}^n}(1 + |x|_{\mathbb{R}^n}^l + |y|_{\mathbb{R}^n}^l)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$. *Pak platí*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(X_t^{x_0})\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(y)\, \mu_\infty(dy) \quad \mathbb{P} - s.j.$$

Uvažujme následující rovnici

$$dX_t = \alpha A X_t\, dt + \Phi dB_t^H, \quad X_0 = x_0, \tag{16}$$

kde $\alpha > 0$ je reálný konstantní parametr, $(B_t^H, t \geq 0)$ je (fBp) s hodnotami v $\mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Nechť e^{At} je exponenciálně stabilní.

Pak je i $e^{\alpha A t}$ exponenciálně stabilní a podle věty 2.3 existuje limitní míra $\mu_\infty^\alpha = N(0, Q_\infty^\alpha)$.
Pro $H > 1/2$ máme

$$
\begin{aligned}
Q_\infty^\alpha &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\alpha A u} Q e^{\alpha A^T v} \phi(u-v)\, du dv \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{A u} Q e^{A^T v} \phi\left(\frac{u}{\alpha} - \frac{v}{\alpha}\right) du dv \\
&= \frac{1}{\alpha^{2H}} Q_\infty,
\end{aligned}
$$

kde $Q = \Phi\Phi^T$ a Q_∞ odpovídá případu $\alpha = 1$.
Pro $H = 1/2$ je tato rovnost zřejmá.
Na základě předchozích výsledků mohou být pořízeny konzistentní odhady parametru α.

Věta 4.6. *Nechť platí (A1) a nechť* $(X_t^{x_0}, t \geq 0)$ *je řešení* (16). *Nechť* $z \in \mathbb{R}^n$ *je libovolné a nechť limitní míra* μ_∞ *existuje s kovariancí* Q_∞ *takovou, že*

$$\langle Q_\infty z, z\rangle > 0.$$

Definujme

$$\hat{\alpha}_T := \left(\frac{\langle Q_\infty z, z\rangle}{\frac{1}{T}\int_0^T |\langle X_t^{x_0}, z\rangle|^2\, dt} \right)^{\frac{1}{2H}}.$$

Pak platí

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\alpha}_T = \alpha, \quad \mathbb{P} - s.j.$$

Důkaz. Položme $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varrho(y) = |\langle y, z\rangle|^2$, $y \in \mathbb{R}^n$. Pak jsou splněny všechny předpoklady věty 4.5 s $l = 1$ a platí

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varrho(X_t^{x_0})\, dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\langle X_t^{x_0}, z\rangle|^2\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\langle y, z\rangle|^2\, \mu_\infty(dy) \\
&= \langle Q_\infty^\alpha z, z\rangle \\
&= \frac{1}{\alpha^{2H}} \langle Q_\infty z, z\rangle, \quad \mathbb{P} - s.j.
\end{aligned}
$$

□

Věta 4.7. *Nechť platí (A1) a nechť* $(X_t^{x_0}, t \geq 0)$ *je řešení* (16). *Nechť* $\Phi \neq 0$. *Definujme*

$$\hat{\alpha}_T := \left(\frac{Tr\ Q_\infty}{\frac{1}{T}\int_0^T |X_t^{x_0}|^2\, dt} \right)^{\frac{1}{2H}}.$$

Pak platí

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\alpha}_T = \alpha, \quad \mathbb{P} - s.j.$$

Důkaz. Položme $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varrho(y) = |y|^2$, $y \in \mathbb{R}^n$. Pak jsou splněny všechny předpoklady věty 4.5 s $l = 1$ a platí

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \varrho(X_t^{x_0})\, dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |X_t^{x_0}|^2\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |X_t^{x_0}|^2\, d\mu_\infty \\
&= \mathrm{Tr}\ Q_\infty^\alpha \\
&= \frac{1}{\alpha^{2H}}\ \mathrm{Tr}\ Q_\infty.
\end{aligned}$$

Zbývá ověřit, že Tr $Q_\infty \neq 0$. Kdyby Tr $Q_\infty = 0$, pak striktně stacionární řešení je $X^{\tilde{x}} = 0$ $\mathbb{P}$-s.j. , tedy $\tilde{x} = 0$ $\mathbb{P}$-s.j. a $\int_0^t e^{A(t-r)}\Phi\, dB_r^H = 0$ $\mathbb{P}$-s.j. pro každé $t \geq 0$. Což je ve sporu s podmínkou $\Phi \neq 0$. □

5 Stochastická rovnice kmitání oscilátoru

Uvažujme následující rovnici

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \sigma\dot{\beta}_t^H, \tag{17}$$

s počáteční podmínkou $X_0 = x_0$, $\dot{X}_0 = x_1$, $a > 0$, $b > 0$ a $\sigma > 0$ je známé. Tato rovnice odpovídá rovnici (1), položíme-li

$X_t = \begin{pmatrix} X_t^0 \\ X_t^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}, B_t^H = \begin{pmatrix} B_1^H(t) \\ B_2^H(t) \end{pmatrix},$

kde $B_2^H = \beta^H$ a B_1^H je nezávislý frakcionální Brownův pohyb.

Zřejmě potom je $AX_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ -bX_t^0 - aX_t^1 \end{pmatrix}, \Phi\, dB_t^H = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma dB_2^H(t) \end{pmatrix},$

$Q = \Phi\Phi^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$

Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. V dalším uvažujeme, že $H = \frac{1}{2}$.

5.1 Případ $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$

Je-li vlastní číslo matice A dvojnásobné, pak fundamentální matice řešení soustavy (17) je

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{at}{2}}(1+\frac{at}{2}) & te^{-\frac{at}{2}} \\ -\frac{a^2}{4}te^{-\frac{at}{2}} & e^{-\frac{at}{2}}(1+\frac{at}{2}) - ate^{-\frac{at}{2}} \end{pmatrix}$$

Předpoklady věty 2.3 jsou splněny, neboť vlastní čísla matice A jsou záporná a A je tedy negativně definitní. Kovarianční operátor limitní míry je tedy roven

$$Q_\infty^{(a)} = \int_0^\infty \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} dt = \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{a^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}, \quad \text{kde}$$

$$a_{11} = t^2 e^{-at}\sigma^2$$

$$a_{12} = (te^{-\frac{at}{2}})(e^{-\frac{at}{2}}(1+\frac{at}{2}) - ate^{-\frac{at}{2}})\sigma^2$$

$$a_{21} = (te^{-\frac{at}{2}})(e^{-\frac{at}{2}}(1+\frac{at}{2}) - ate^{-\frac{at}{2}})\sigma^2$$

$$a_{22} = (e^{-\frac{at}{2}}(1+\frac{at}{2}) - ate^{-\frac{at}{2}})^2\sigma^2$$

Zřejmě

$$\mathrm{Tr}\, Q_\infty^{(a)} = \sigma^2 \frac{a^2+4}{2a^3}$$

Protože funkce $a \to \sigma^2 \frac{a^2+4}{2a^3}$ je klesající pro $a \in \mathbb{R}_+$, získáme jednoznačné vyjádření $a = R(\sigma^2, \mathrm{Tr}\, Q_\infty^{(a)})$. Funkce $R(\sigma^2, \cdot)$ je spojitá. Označíme $Y_T = \frac{1}{T}\int_0^T |\tilde{X}_t|^2\, dt$, kde $\tilde{X}_t$ je stacionární řešení rovnice (17). Položíme-li $a_T = R(\sigma^2, Y_T)$, pak z věty 4.7 víme, že a_T konverguje $\mathbb{P}$-s.j. ke skutečné hodnotě parametru a.

5.2 Případ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Předpokládejme, že $a^2 < 4b$, pak reálné části vlastních čísel matice A jsou záporné a jsou splněny předpoklady věty 2.3. Označíme-li $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{|a^2-4b|}$, pak zřejmě platí, že $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ a $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Fundamentální matice řešení soustavy (17) je nyní

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \\
b_{11} &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\
b_{12} &= \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\
b_{21} &= e^{\alpha t}(\alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t)) - \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha t}(\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t)) \\
b_{22} &= \frac{1}{\beta} e^{\alpha t}(\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t))
\end{aligned}
$$

Podobným výpočtem jako v předchozím případě získáme

$$\mathrm{Tr}\ Q_{\infty}^{(a,b)} = \sigma^2 \frac{b+1}{2ab}$$

Protože pravá strana klesá s rostoucím $a \in \mathbb{R}_+$ i $b \in \mathbb{R}_+$ na množině, kde $a^2 < 4b$, získáme jednoznačný odhad jednoho z parametrů, známe-li hodnotu druhého. Označíme $Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T |\tilde{X}_t|^2 \, dt$, kde $\tilde{X}_t$ je je stacionární řešení rovnice (17). Položíme-li

$$a_T = \sigma^2 \frac{(b+1)}{2bY_T},$$

pak podle věty 4.7 konverguje a_T $\mathbb{P}$-s.j. ke skutečné hodnotě parametru. Je-li například $b = 1$, odhad parametru a bude $a_T = \frac{\sigma^2}{Y_T}$.

Reference

[1] F. E. Benth, G. D. Nunno, T. Lindstrøm, B. Øksendal a T. Zhang: *Stochastic Analysis and Applications*, Springer Verlag, (2005).

[2] J. Janák: *Geometrický frakcionální Brownův pohyb*, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, bakalářská práce, (2007).

[3] B. Maslowski a J. Pospíšil: *Ergodicity and parameter estimates for infinite-dimensional fractional Ornstein-Uhlenbeck process*, (2007), zasláno k publikaci.

[4] A. Mandelbaum: *Linear estimators and measurable linear transformations on a Hilbert space*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 65 (1984), 385-397.

[5] A. N. Shiryaev: *Probability*, Springer, Berlin (1984), 227-228.

[6] M. Vyoral: *Frakcionální Brownův pohyb*, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze, diplomová práce, (2002).