UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# Rozdelenia s ťažkými chvostami v neživotnom poistení

Diplomová práca

Bc. Jana Michaliková

Bratislava 2009

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

# Rozdelenia s ťažkými chvostami v neživotnom poistení

Diplomová práca

Študijný odbor: 9.1.10 Štatistika

Vedúci diplomovej práce:
doc. RNDr. Rastislav Potocký, CSc.

Diplomant:
Bc. Jana Michaliková

Bratislava 2009

# Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že diplomovú prácu s názvom *Rozdelenia s ťažkými chvostami v neživotnom poistení* som vypracovala samostatne podľa pokynov vedúceho diplomovej práce s použitím odbornej literatúry uvedenej v záverečnej časti.

Bratislava 16. 4. 2009 ............................

*Vlastnoručný podpis*

# Poďakovanie

Chcela by som sa poďakovať vedúcemu diplomovej práce doc. RNDr. Rastislavovi Potockému, CSc. za konštruktívne pripomienky a cenné rady, ktoré mi pri tvorbe tejto práce poskytol a za čas, ktorý mi venoval. Okrem toho by som sa chcela poďakovať mojim priateľom, ktorí mi pomohli pri tvorbe i kontrole tejto práce.

# Abstrakt

Názov práce: Rozdelenia s ťažkými chvostami v neživotnom poistení

Pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, FMFI UK v Bratislave

Autor: Bc. Jana Michaliková

Vedúci diplomovej práce: doc. RNDr. Rastislav Potocký, CSc.

Stupeň odbornej kvalifikácie: Magister. Bratislava: FMFI UK. 2009

Kľúčové slová: rozdelenia s ťažkými chvostami, Paretovo rozdelenie, lognormálne rozdelenie, log-gama rozdelenie, Weibullovo rozdelenie, neživotné poistenie, výška poistného plnenia, teória ruinovania, pravdepodobnosť zruinovania, Cramérova - Lundbergova veta.

Abstrakt: Pre správne stanovenie výšky poistného a predpovedanie vývoja budúcich nárokov potrebuje poisťovňa poznať výšku poistných plnení. Cieľom tejto práce je predstaviť základné rozdelenia s ťažkými chvostami, ktoré sú najvhodnejšou skupinou rozdelení pre modelovanie tohto typu náhodných premenných. Uvedieme detailný postup na hľadanie najlepšieho rozdelenia a aplikujeme ho pri komplexnej analýze dvoch oblastí neživotného poistenia.

# Abstract

Thesis title: Heavy - tailed distributions in non-life insurance

Department: Department of Applied Mathematics and Statistics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University in Bratislava

Author: Bc. Jana Michaliková

Supervisor: doc. RNDr. Rastislav Potocký, CSc.

Level of professional qualification: Master. Bratislava: FMFI UK. 2009

Keywords: heavy - tailed distributions, Pareto distribution, lognormal distribution, log-gama distribution, Weibull distribution, non-life insurance, amount of the individual claim, ruin theory, probability of ruin, Cramér - Lundberg theorem.

Abstract: To determine the height of the premium and forecast the trend of the future claims the insurance companies have to know the amount of the individual claims as one of the basic information. The purpose of this thesis is to introduce main distributions with heavy tails which are most suited distribution group for modelling this type of random variables. In addition following work contains a detailed description of the process how to find the best distribution of the claim amount and its application to the complex analysis of the two classes of non-life insurance.

# Predhovor

Oblasť neživotného poistenia je aj na Slovensku veľmi rozsiahla, zahŕňa širokú škálu produktov a rizík a má veľký význam či už pre poisťovne, ale aj pre samotných poistených klientov. Výskyt poistných plnení je v skutočnosti náhodný proces, nemôžeme teda presne poznať, ako sa bude v budúcnosti vyvíjať. Pre poisťovňu je však nevyhnutné vedieť tento proces aspoň do istej miery predpovedať, poznať vhodný model, ktorý sa čo najviac približuje skutočnosti. Na základe toho totiž potrebuje stanovovať výšku poistného pre jednotlivé zmluvy a takisto zabezpečovať dostatočnú výšku rezerv, aby nenastal okamih zruinovania.

Táto práca sa venuje celému procesu, ktorý je s modelovaním spojený, teda rozdeleniam vhodným pre počet poistných plnení, pre výšku poistných plnení i presnému postupu, ako je možné tieto rozdelenia použiť a na základe akých kritérií sa rozhodnúť pre tie najvhodnejšie. Dôraz je kladený na rozdelenia s ťažkými chvostami, ktoré sa v súčasnosti čoraz viac používajú na popisovanie výšky poistných plnení, keďže zahŕňajú aj pravdepodobnosť extrémnych poistných plnení.

Okrem teoretickej časti, ktorá sumarizuje pravdepodobnostný a štatistický základ potrebný pre túto oblasť, sa venujeme aj pravdepodobnosti zruinovania a jej odhadovaniu vo všeobecnosti a uvádzame výsledky pre konkrétne rozdelenie.

V poslednej časti je uskutočnená praktická analýza skutočných dát, na ktorých ilustrujeme celý postup a výsledky naozaj poukazujú na široké možnosti využitia rozdelení s ťažkými chvostami.

Prínos tejto práce je teda nielen v poskytnutí teoretického podkladu a všeobecného postupu, ako pri modelovaní poistných plnení postupovať, ale tiež v komplexnej analýze rozsiahleho portfólia poistných plnení v dvoch sférach neživotného poistenia.

# Obsah

# Úvod

Princíp poisťovní je založený na vzájomnej dohode medzi poistenou osobou a poisťovňou, je to vždy konkrétna zmluva medzi spoločnosťou a klientom. Poistená osoba sa zaväzuje, že bude poisťovni pravidelne platiť poistné a na druhej strane poisťovňa má záväzok vyplatiť klientovi poistnú sumu v dohodnutej výške v prípade, že nastane poistná udalosť. Aj keď je pravdepodobnosť nastatia poistnej udalosti pre klienta väčšinou veľmi malá, jej dôsledky bývajú často veľmi závažné, preto je klient ochotný platiť poisťovni poistné na krytie daného poistného rizika.

Portfólio poisťovne je teda zložené z veľkého počtu poistiek, pričom spoločným charakteristickým prvkom je nízka pravdepodobnosť výskytu poistnej udalosti, avšak poistné plnenie býva zväčša veľmi vysoké. Jednotlivé poistné udalosti sú udalosti náhodné, pričom môžeme predpokladať, že pre konkrétne zmluvy, resp. poistené osoby sú nezávislé.

Aby sme si priblížili princíp poisťovní, uvažujme nasledujúci jednoduchý príklad: predpokladajme, že pravdepodobnosť výskytu poistnej udalosti pri analyzovanom type poistenia je 0,005. To znamená, že približne pri piatich z 1000 uzavretých zmlúv nastane poistná udalosť, a teda poisťovňa bude mať povinnosť vyplatiť poistné plnenie. Poisťovňa teda potrebuje získať finančné prostriedky na vyplatenie týchto piatich poistných súm a princíp je taký, že stanoví poistné tak, aby prijaté poistné z 1000 zmlúv pokrývalo práve daných 5 poistných plnení. Samozrejme tento opis je veľmi zjednodušený, ale už na základe tohto vidíme, ktoré údaje sú pre poisťovňu dôležité pri stanovovaní poistného, resp. poistnej sumy.

Pre správne stanovenie výšky poistného potrebuje poisťovňa poznať frekvencie výskytu poistných udalostí a takisto aké výšky poistných plnení môže očakávať v prípade ich vzniku. Ak by sme tieto pojmy preniesli do teórie pravdepodobnosti, poisťovňa pri výpočtoch poistného potrebuje poznať rozdelenie počtu poistných plnení a takisto rozdelenie výšky poistných plnení, či už individuálnych alebo celkových. Preto sa v nasledujúcich častiach budeme venovať práve základným typom rozdelení, ktoré v praxi najlepšie popisujú skutočné hodnoty.

V prípade počtu poistných plnení sú známe diskrétne rozdelenia, ktoré sú na ich popisovanie najvhodnejšie a tým sa v práci venujeme len stručne. Dôraz je kladený na rozdelenia výšky poistných plnení, kde sú možnosti rozdelení oveľa širšie, a preto je potrebné poznať ich charakteristiky a postup, ako sa rozhodnúť pre to najvhodnejšie. Táto diplomová práca sa zameriava na triedu rozdelení s ťažkými chvostami, ktorá v poslednom období nachádza čoraz širšie využitie. V záverečnej časti je uskutočnená komplexná analýza portfólia poistných plnení v dvoch oblastiach neživotného poistenia - v oblasti cestovného poistenia a v oblasti poistenia majetku.

# Kapitola 1

# Základné pojmy z teórie pravdepodobnosti

Oblasť poistných vied vychádza zo základov teórie pravdepodobnosti a aj v tejto diplomovej práci budeme používať rôzne pojmy pochádzajúce práve z tohto teoretického základu. Preto v prvej kapitole uvádzame definície používaných pojmov, ktoré sme čerpali hlavne z [8] a [12]. Ich vlastnosti i ďalšie súvislosti je možné nájsť v uvedenej ale aj rôznej inej literatúre venovanej tejto oblasti.

**Definícia 1.1.** *Náhodná premenná* je funkcia, ktorá každému možnému výsledku experimentu priradí hodnotu z množiny reálnych čísel. Diskrétna náhodná premenná nadobúda hodnoty z konečnej alebo spočítateľnej množiny, spojitá náhodná premenná môže nadobudnúť ľubovoľnú hodnotu z intervalu reálnych čísel.

**Definícia 1.2.** *Distribučná funkcia* diskrétnej alebo spojitej náhodnej premennej $X$ je definovaná pre každé reálne číslo $x$ vzťahom:

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{1.1}$$

Slovne môžeme distribučnú funkciu definovať ako pravdepodobnosť, že náhodná premenná $X$ má hodnoty menšie alebo rovné ako reálne číslo $x$.

**Definícia 1.3.** Funkcia $f(x)$ sa nazýva *hustota pravdepodobnosti* spojitej náhodnej premennej $X$, ak pre ľubovoľné reálne číslo $x_0$ platí:

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\, dx \tag{1.2}$$

pre $-\infty < x_0 < \infty$.

**Definícia 1.4.** *Stredná hodnota diskrétnej náhodnej premennej $X$* je definovaná vzťahom:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, P(x_i), \tag{1.3}$$

kde $x_i, i = 1, 2, \ldots$ sú možné hodnoty a $P(x_i)$ príslušné pravdepodobnosti.

*Stredná hodnota spojitej náhodnej premennej $X$* je definovaná vzťahom:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx, \tag{1.4}$$

kde $f(x)$ je hustota náhodnej premennej $X$.

**Definícia 1.5.** *Disperzia náhodnej premennej $X$* je definovaná vzťahom:

$$D(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\}, \tag{1.5}$$

čo slovne môžeme vyjadriť ako strednú hodnotu štvorca odchýlky náhodnej premennej $X$ od jej strednej hodnoty $E(X)$.

# Kapitola 2

# Rozdelenia počtu poistných plnení

Cieľom tejto časti je priblížiť základné rozdelenia pravdepodobnosti, ktoré najlepšie popisujú počet poistných plnení. Je prirodzené, že to budú diskrétne rozdelenia, aj keď v závere uvedieme používanú aproximáciu spojitým, konkrétne normálnym rozdelením. Dôraz tejto diplomovej práce je kladený na rozdelenia popisujúce výšku poistných plnení, preto uvedieme v tejto kapitole len základné vlastnosti rozdelení počtu poistných plnení.

## 2.1 Alternatívne rozdelenie A(p)

Tento typ rozdelenia patrí medzi najjednoduchšie, keďže možné sú len dva výsledky: náhodná udalosť nastane s pravdepodobnosťou $p$ alebo náhodná udalosť nenastane s pravdepodobnosťou $1 - p$.

Pri aplikovaní na počet poistných udalostí môže táto náhodná premenná nadobúdať len hodnotu 0 (ak poistná udalosť nenastala) alebo hodnotu 1 (ak poistná udalosť nastala).

**Definícia 2.1.** Náhodná premenná $N$ má *alternatívne rozdelenie* (nazývané tiež Bernoulliho alebo nula - jednotkové) s parametrom $p$ práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$P(k) = p^k(1-p)^{1-k} \tag{2.1}$$

pre $k = 0, 1$.

**Veta 2.1.** *Základné popisné charakteristiky alternatívneho rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(N) = p$

*Disperzia:* $D(N) = p\ (1 - p)$

Toto rozdelenie patrí do triedy exponenciálnych a platí nasledovný vzťah medzi alternatívnym a binomickým rozdelením:

**Veta 2.2.** *Ak $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sú nezávislé náhodné premenné rovnako rozdelené s alternatívnym rozdelením s parametrom $p$, potom súčet týchto náhodných premenných má binomické rozdelenie s parametrami $n, p$.*

## 2.2 Binomické rozdelenie Bin(n, p)

Pri predchádzajúcom rozdelení sme uvažovali experiment, pri ktorom náhodná udalosť buď nastala alebo nenastala. Tentokrát budeme tento pokus opakovať nezávisle $n$-krát za sebou, pričom predpokladáme, že pravdepodobnosť výskytu poistnej udalosti je pre každý pokus $p$.

**Definícia 2.2.** Náhodná premenná $N$ má *binomické rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $n, p$ práve vtedy, ak pravdepodobnosť, že pri $n$ nezávislých pokusoch nastane pozorovaný jav práve $k$-krát, má tvar:

$$P(n = k) = \binom{n}{k} p^k\ (1 - p)^{n-k} \tag{2.2}$$

pre $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

**Veta 2.3.** *Základné popisné charakteristiky binomického rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(N) = np$

*Disperzia:* $D(N) = np\ (1 - p)$

Na základe týchto vzťahov medzi charakteristikou polohy (strednou hodnotou) a charakteristikou variability (disperziou) je zrejmé, že vždy platí nasledujúca nerovnosť: $E(N) > D(N)$. V praxi často tieto charakteristiky poznáme (alebo ich vieme odhadnúť) a na základe toho môžeme rozhodnúť, či je vhodné použiť tento typ rozdelenia na aproximáciu našich dát.

Uvedieme si ešte jednu vlastnosť binomického rozdelenia:

**Veta 2.4.** *Nech náhodná premenná $X$ má binomické rozdelenie s parametrami $n, p$, náhodná premenná $Y$ má binomické rozdelenie s parametrami $m, p$ a tieto náhodné premenné sú nezávislé. Potom náhodná premenná $X + Y$ má binomické rozdelenie s parametrami $n + m, p$.*

## 2.3 Poissonovo rozdelenie Po($\lambda$)

Tento typ rozdelenia takisto súvisí s binomickým rozdelením, môžeme ho totiž dostať ako limitný prípad pre $n \to \infty$ a zároveň $p \to 0$. V praxi teda toto rozdelenie používame na aproximáciu málo pravdepodobných náhodných udalostí pri veľkom počte nezávislých opakovaní experimentu.

**Definícia 2.3.** Náhodná premenná $N$ má *Poissonovo rozdelenie* s parametrom $\lambda$ práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} \tag{2.3}$$

pre $k = 0, 1, 2, \ldots$

**Veta 2.5.** *Základné popisné charakteristiky Poissonovho rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(N) = \lambda$

*Disperzia:* $D(N) = \lambda$

Teda vidíme, že pri tomto type rozdelenia sa stredná hodnota rovná disperzii, čo využívame pri výbere najlepšieho rozdelenia na popis dát.

Toto rozdelenie sa často používa ako veľmi dobrá aproximácia binomického rozdelenia, ak $n$ je veľké (zvyčajne aspoň 100) a $p$ je malé (zvyčajne najviac $0,05$).

Jedno z najčastejších využití tohto rozdelenia v praxi je na aproximáciu počtu poistných plnení v časovom intervale dĺžky t s priemernou pravdepodobnosťou výskytu $\lambda$ v časovom intervale jednotkovej dĺžky. Takáto náhodná premenná má potom Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda t$.

## 2.4 Geometrické rozdelenie Geo(p)

Rovnako ako pri binomickom rozdelení nezávisle opakujme pokus, pričom pravdepodobnosť, že náhodná udalosť nastane, je $p$. Pri binomickom rozdelení nás zaujímala pravdepodobnosť, že sa daná udalosť vyskytne práve pri $k$ pokusoch z $n$ uskutočnených. V tomto prípade budeme náš pokus opakovať toľkokrát, kým prvýkrát nastane daná udalosť. Náhodná premenná $N$ teda bude predstavovať počet opakovaní, kým nastala pozorovaná udalosť, teda ak $N = k$, interpretácia je, že pri prvých $k-1$ pokusoch náhodná udalosť nenastala a pri $k$-tom pokuse nastala.

**Definícia 2.4.** Náhodná premenná $N$ má *geometrické rozdelenie* s parametrom $p$ práve vtedy, ak pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$P(k) = p\ (1-p)^{k-1} \tag{2.4}$$

pre $k = 1, 2, 3, \ldots$

**Veta 2.6.** *Základné popisné charakteristiky geometrického rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(N) = \dfrac{1}{p}$
*Disperzia:* $D(N) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Rovnako ako alternatívne rozdelenie bolo špeciálny prípad binomického rozdelenia, existuje zovšeobecnenie geometrického rozdelenia, a tým je negatívne binomické rozdelenie.

## 2.5 Negatívne binomické rozdelenie NB(k,p)

Ako už bolo spomenuté, toto rozdelenie vychádza z geometrického rozdelenia, teda znova nezávisle opakujeme pokusy, pričom tentokrát neskončíme vtedy, keď náhodná udalosť nastane prvýkrát, ale až vtedy, keď nastane $k$-krát. Pravdepodobnostná funkcia tohto rozdelenia má nasledovný tvar.

**Definícia 2.5.** Náhodná premenná $N$ má *negatívne binomické rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $k$ a $p$ práve vtedy, ak jej pravdepodobnostná funkcia má tvar:

$$P(n) = \binom{n-1}{k-1} p^k \, (1-p)^{n-k} \tag{2.5}$$

pre $n = k, k+1, \ldots$ a $k$ ľubovoľné kladné celé číslo.

**Veta 2.7.** *Základné popisné charakteristiky negatívneho binomického rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(N) = \frac{k}{p}$
*Disperzia:* $D(N) = \frac{k(1-p)}{p^2}$

Na základe uvedených vzťahov pre popisné charakteristiky je zrejmé, že medzi nimi platí nerovnosť $E(N) < D(N)$.

Teda pri rozhodovaní sa o najvhodnejšom rozdelení z hlavných tried, ktoré boli v tejto časti bližšie popísané, je dôležitý vzťah medzi strednou hodnotou a disperziou našich dát a na základe toho zvolíme binomické, Poissonovo alebo negatívne binomické rozdelenie, prípadne ich jednoduchšie verzie alternatívne či geometrické rozdelenie.

## 2.6 Aproximácia normálnym rozdelením

**Definícia 2.6.** Náhodná premenná $N$ má *normálne rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $\mu$ a $\sigma^2$ práve vtedy, ak hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \, e^{-\dfrac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.6}$$

kde $-\infty < n < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ a $\sigma > 0$.

**Veta 2.8.** *Základné popisné charakteristiky normálneho rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(N) = \mu$

*Disperzia:* $D(N) = \sigma^2$

Aproximácie diskrétnych rozdelení normálnym rozdelením sa v praxi veľmi často využívajú a ich platnosť sa opiera o jednu zo základných viet používaných v štatistike, a to o centrálnu limitnú vetu:

**Veta 2.9.** *Nech* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné. Nech* $E(X_i) = \mu$ *a nech* $D(X_i) = \sigma^2$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Nech* $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$*. Potom rozdelenie náhodnej premennej* $\sqrt{n}\ \frac{Y-\mu}{\sigma}$ *konverguje k normálnemu rozdeleniu* $N(0,1)$*.*

Je zrejmé, že táto aproximácia je tým lepšia, čím je hodnota $n$ väčšia.

Na základe tejto vety sa dajú ľahko odvodiť nasledujúce aproximácie pre diskrétne rozdelenia:

**Veta 2.10.** *Ak náhodná premenná* $N$ *má binomické rozdelenie s parametrami* $n, p$*, potom pre dostatočne veľké* $n$ *môžeme túto premennú aproximovať normálnym rozdelením s parametrami* $np$ *a* $np\,(1-p)$*.*

Samozrejme je ťažké určiť, ktorú hodnotu $n$ môžeme považovať už za dostatočne veľkú, preto sa v praxi používa kritérium, že túto aproximáciu môžeme považovať za dobrú, ak sú splnené nasledovné nerovnosti: $np > 5$ a zároveň $n(1-p) > 5$.

**Veta 2.11.** *Ak náhodná premenná* $N$ *má Poissonovo rozdelenie s parametrom* $\lambda$*, potom pre dostatočne veľké* $\lambda$ *môžeme túto premennú aproximovať normálnym rozdelením s parametrami* $\lambda$ *a* $\lambda$*.*

Pri tomto rozdelení za postačujúcu hranicu dobrej aproximácie považujeme $\lambda > 5$.

Všetky definície uvedených rozdelení spolu s aproximáciou môže čitateľ v určitej podobe nájsť aj v [8] a [12].

# Kapitola 3

# Rozdelenia výšky poistných plnení

V predchádzajúcej časti sme na popísanie počtu poistných plnení používali diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti, čo vyplývalo z možných hodnôt náhodnej premennej. Avšak výšku týchto plnení je oveľa vhodnejšie aproximovať spojitými rozdeleniami. Na to, aby sme našli tie najvhodnejšie, je dobré si uvedomiť niektoré vlastnosti, ktoré môžeme pozorovať pri jednotlivých individuálnych plneniach.

Oblasť neživotného poistenia je typická tým, že sa so značnou pravdepodobnosťou vyskytujú aj poistné udalosti s výrazne vyššou hodnotou poistného plnenia, čo spôsobuje, že tieto náhodné premenné sú veľmi rozptýlené, aj keď väčšina z nich sa nachádza pod úrovňou strednej hodnoty.

Ako najvhodnejšie typy rozdelení sa preto ukazujú tie, ktoré sú pravostranne zošikmené a konvergencia k nule nie je príliš rýchla.

Medzi najznámejšie a najpoužívanejšie rozdelenia patria exponenciálne rozdelenie, Paretovo rozdelenie, Weibullovo rozdelenie, gama a log-gama rozdelenie a lognormálne rozdelenie. Všetky tieto rozdelenia sú definované len pre kladné hodnoty $x$, pre $x < 0$ je hustota všetkých spomínaných rozdelení rovná nule. Tento predpoklad je ale v praxi splnený, keďže poistné plnenia nemôžu nadobúdať záporné hodnoty.

Každé z týchto rozdelení má svoje špecifiká a nie je možné povedať, ktoré z nich je vo všeobecnosti najlepšie, vždy to závisí od konkrétnych poistných plnení, ktoré chceme popisovať. Preto sa v tejto diplomovej práci budeme venovať aj teoretickým charakteristikám týchto rozdelení a ich vlastnostiam, ale taktiež na konkrétnych dátach budeme analyzovať, ktoré rozdelenie je najvhodnejšie, v čom sa líšia a tým poskytneme aj návod, ako by mohlo rozhodovanie prebiehať v praxi. Uvedené definície a vlastnosti je možné s určitými modifikáciami označení a parametrov nájsť v [8], [12] a [19].

## 3.1 Exponenciálne rozdelenie Exp($\lambda$)

Toto rozdelenie patrí z hľadiska funkčného vyjadrenia medzi najjednoduchšie a pri modelovaní výšky poistných plnení sa často používa ako prvotná hrubá aproximácia. Nepopisuje však veľmi dobre intervaly najnižších a najvyšších hodnôt.

**Definícia 3.1.** Náhodná premenná $X$ má *exponenciálne rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrom $\lambda$ práve vtedy, ak hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(x) = \lambda \, e^{-\lambda x} \tag{3.1}$$

pre $x > 0, \lambda > 0$.

*Distribučná funkcia* má takýto tvar:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ak } x \geq 0 \\ 0 & \text{ak } x < 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

**Veta 3.1.** *Základné popisné charakteristiky exponenciálneho rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

*Disperzia:* $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

## 3.2 Gama rozdelenie G($\alpha, \beta$)

Toto rozdelenie na rozdiel od exponenciálneho závisí od dvoch parametrov, preto pri modelovaní výšky poistných plnení poskytuje širší záber možností, aj keď interval najvyšších hodnôt stále nemôžeme považovať vo všeobecnosti za dobre aproximovaný.

**Definícia 3.2.** Náhodná premenná $X$ má *gama rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $\alpha, \beta$ práve vtedy, ak hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-\beta x} \tag{3.3}$$

pre $x > 0$, kde $\Gamma(\alpha)$ je gama funkcia definovaná vzťahom: $\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy$ pre $\alpha > 0$.

*Distribučná funkcia* má takýto tvar:

$$F(x) = \frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)} \tag{3.4}$$

kde $\gamma(\alpha, \beta x)$ je dolná neúplná gama funkcia definovaná vzťahom: $\int\limits_0^{\beta x} y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy$ pre $\alpha > 0$.

**Veta 3.2.** *Základné popisné charakteristiky gama rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$

*Disperzia:* $D(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Ak parameter $\alpha$ je celé číslo, potom gama rozdelenie reprezentuje súčet $\alpha$ nezávislých náhodných premenných s exponenciálnym rozdelením s parametrom $\beta$. Preto špeciálne ak $\alpha = 1$, gama rozdelenie G(1, $\beta$) je zhodné s rozdelením Exp($\beta$).

V praxi je niekedy výhodnejšie použiť určitú obmenu gama rozdelenia, a to log-gama rozdelenie, ktoré je definované takto:

**Definícia 3.3.** Náhodná premenná $X$ má *log-gama rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $\alpha, \beta$ práve vtedy, ak hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{x\, \Gamma(\alpha)}\, (\ln x)^{\alpha-1}\, e^{(-\beta \ln x)} \tag{3.5}$$

pre $x > 0$.

## 3.3 Paretovo rozdelenie Pa($\alpha$, c)

Toto rozdelenie sa v praxi veľmi často používa v dvoch verziách, a to americkej a európskej. Interval veľkých hodnôt výšky poistných plnení je v tomto prípade aproximovaný oveľa lepšie ako pri predchádzajúcich rozdeleniach.

**Definícia 3.4.** Náhodná premenná $X$ má *európske Paretovo rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $\alpha, c$ práve vtedy, ak hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{\alpha c^\alpha}{x^{\alpha+1}} \tag{3.6}$$

pre $\alpha > 0$, $c > 0$, $x > c$.

**Definícia 3.5.** Náhodná premenná $X$ má *americké Paretovo rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $\alpha, b$ práve vtedy, ak hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{\alpha b^\alpha}{(b+x)^{\alpha+1}} \tag{3.7}$$

pre $\alpha > 0$, $x > 0$, $b > 0$.

*Distribučná funkcia* má takýto tvar:

**európska verzia:**

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^\alpha \tag{3.8}$$

**americká verzia:**

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{b+x}\right)^\alpha \tag{3.9}$$

**Veta 3.3.** *Základné popisné charakteristiky Paretovho rozdelenia:*

*Stredná hodnota:*

**európska verzia:** $E(X) = \frac{\alpha c}{\alpha - 1}$, *pre* $\alpha > 1$

**americká verzia:** $E(X) = \frac{b}{\alpha - 1}$, *pre* $\alpha > 1$

*Disperzia:*

**európska verzia:** $D(X) = \dfrac{\alpha c^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, *pre* $\alpha > 2$

**americká verzia:** $D(X) = \dfrac{\alpha b^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, *pre* $\alpha > 2$

Priamo z definícií oboch verzií je zrejmé, že medzi nimi platí nasledovný vzťah:

**Veta 3.4.** *Ak náhodná premenná $X$ má európske Paretovo rozdelenie $Pa(\alpha, c)$, potom náhodná premenná $X - c$ má americké Paretovo rozdelenie $Pa(\alpha, b)$, pričom $b = c$.*

## 3.4 Weibullovo rozdelenie W($\gamma$, c)

Na modelovanie výšky poistných plnení sa často používa tento typ rozdelenia, keďže aproximácia intervalu veľkých hodnôt je dobrá, aj keď funkčné vyjadrenie tohto rozdelenia nie je až také jednoduché.

**Definícia 3.6.** Náhodná premenná $X$ má *Weibullovo rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $\lambda, k$ práve vtedy, ak hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \tag{3.10}$$

pre $x > 0$, $k > 0$, $\lambda > 0$.

*Distribučná funkcia* má takýto tvar:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \tag{3.11}$$

**Veta 3.5.** *Základné popisné charakteristiky Weibullovho rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(X) = \lambda\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

*Disperzia:* $D(X) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2\right]$

## 3.5 Lognormálne rozdelenie LN($\mu, \sigma^2$)

Priebeh funkcie tohto rozdelenia je veľmi podobný ako priebeh výšky poistných plnení, pretože malé hodnoty sú málo pravdepodobné, stredné hodnoty sú najpravdepodobnejšie a veľké hodnoty sú opäť málo pravdepodobné, ale aj ich pravdepodobnosť je kladná.

**Definícia 3.7.** Náhodná premenná $X$ má *lognormálne rozdelenie* pravdepodobnosti s parametrami $\mu, \sigma^2$ práve vtedy, ak $\ln(X)$ má normálne rozdelenie s parametrami $\mu, \sigma^2$. Hustota pravdepodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.12}$$

pre $x > 0$.

*Distribučná funkcia* má takýto tvar:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\ln x} e^{-\frac{(y - \mu)^2}{2\sigma^2}} dy \tag{3.13}$$

**Veta 3.6.** *Základné popisné charakteristiky lognormálneho rozdelenia:*

*Stredná hodnota:* $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

*Disperzia:* $D(X) = \left[e^{\sigma^2} - 1\right] e^{2\mu + \sigma^2}$

Okrem týchto základných rozdelení sa môžeme v praxi stretnúť aj s rôznymi zmesami týchto rozdelení, napríklad v [18] sú uvedené zmesi Weibullových a Paretových rozdelení a v [15] je spomenutá zmes gama a log-gama rozdelenia a použitá v konkrétnom príklade.

# Kapitola 4

# Triedy rozdelení veľkých poistných plnení

V tretej kapitole sme uviedli základné typy rozdelení pravdepodobnosti používaných na modelovanie výšky poistných plnení. Na základe skúseností z poistnej praxe sa ukazuje, že ich môžeme rozdeliť do dvoch skupín: na tie, ktoré sú vhodné pre malé poistné plnenia a na tie, ktoré sú vhodné pre veľké poistné plnenia. Oblasť neživotného poistenia je charakteristická tým, že rozdelenie celkovej výšky poistných plnení je výrazne závislé od najväčšieho poistného plnenia, ktoré môže byť značne odlišné ako následok zemetrasení, silných vetrov, búrok, požiarov a podobne. Preto sa na ich modelovanie používa druhá skupina rozdelení, ktoré sa nazývajú tiež rozdelenia s ťažkými chvostami.

Predtým ako prejdeme k samotným triedam rozdelení si ešte definujeme pojem chvosta rozdelenia.

**Definícia 4.1.** Nech $F(x)$ je distribučná funkcia náhodnej premennej $X$ definovaná vzťahom (1.1). *Pravým chvostom rozdelenia* nazývame:

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x) \tag{4.1}$$

## 4.1 Rozdelenia s ťažkými chvostami

**Definícia 4.2.** Hovoríme, že rozdelenie náhodnej premennej $X$ má *ťažký chvost* (nazývaný niekedy aj *tučný chvost*), ak platí:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} P(X > x) = \lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} \bar{F}(x) = \infty \text{ pre každé } \lambda > 0 \qquad (4.2)$$

Ekvivalentne môžeme túto definíciu vyjadriť použitím momentovej vytvárajúcej funkcie:

$$M_f(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda x}\, dF(x) = \infty \text{ pre každé } \lambda > 0, \qquad (4.3)$$

teda rozdelenie má ťažký chvost, ak jeho momentová vytvárajúca funkcia je nekonečná pre všetky hodnoty parametra $\lambda > 0$.

Pre názornejšiu interpretáciu by sme voľne mohli povedať, že rozdelenie má ťažký chvost, ak jeho konvergencia k nule je pomalšia ako pri exponenciálnom rozdelení.

V teórii pravdepodobnosti sa vyskytujú aj pojmy ako rozdelenie s ťažkým ľavým chvostom, prípadne s oboma ťažkými chvostami a ich definícia je podobná ako Definícia 4.2. V oblasti neživotného poistenia sa však veľmi nevyužívajú, preto sa im v tejto práci dôkladnejšie nebudeme venovať.

Spomedzi rozdelení uvedených v tretej kapitole sa do triedy rozdelení s ťažkými chvostami zaraďujú tieto rozdelenia:

- Paretovo rozdelenie,
- Weibullovo rozdelenie,
- lognormálne rozdelenie,
- log-gama rozdelenie.

Ako príklad rozdelení s oboma ťažkými chvostami môžeme uviesť Cauchyho rozdelenie alebo t-rozdelenie.

Existujú dve dôležité podtriedy rozdelení s ťažkými chvostami, a to rozdelenia s dlhými chvostami a subexponenciálne rozdelenia.

## 4.2 Rozdelenia s dlhými chvostami

**Definícia 4.3.** Hovoríme, že rozdelenie náhodnej premennej $X$ má *dlhý chvost*, ak platí:

$$\lim_{x\to\infty} P(X > x + t \,|X > x) = 1 \tag{4.4}$$

Môžeme použiť tiež ekvivalentné vyjadrenie použitím priamo chvosta rozdelenia:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x-t)}{\bar{F}(x)} = 1 \text{ pre každé } t > 0 \tag{4.5}$$

Intuitívna interpretácia takéhoto typu rozdelenia je, že ak prekročíme istú vysokú hranicu, potom s pravdepodobnosťou blížiacou sa k jednotke prekročíme aj všetky vyššie hranice, teda situácia môže byť v skutočnosti ešte horšia, ako sa na prvý pohľad zdá.

Vzťah medzi rozdeleniami s ťažkými a s dlhými chvostami je taký, že každé rozdelenie s dlhým chvostom je zároveň rozdelením s ťažkým chvostom, avšak naopak to neplatí.

## 4.3 Subexponenciálne rozdelenia

Vlastnosť subexponenciality je vo všeobecnosti definovaná použitím konvolúcie rozdelení pravdepodobnosti. Pre dve nezávislé rovnako rozdelené náhodné premenné $X_1$, $X_2$ so spoločnou distribučnou funkciou $F$ je konvolúcia definovaná pomocou Lebesgueovho-Stieltjesovho integrálu ako:

$$P(X_1 + X_2 \leq x) = F^{*2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\, dF(y) \tag{4.6}$$

Podobne môžeme túto definíciu rozšíriť aj pre $n$ náhodných premenných a určiť tak $n$-tú konvolúciu distribučnej funkcie $F^{*n}(x)$.

Rozdelenie pravdepodobnosti je potom subexponenciálne, ak platí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{*2}(x)}{2\bar{F}(x)} = 1 \tag{4.7}$$

Z toho pre ľubovoľné $n \geq 1$ dostaneme:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{n\bar{F}(x)} = 1 \qquad (4.8)$$

Pravdepodobnostná interpretácia subexponenciálneho rozdelenie je uvedená v nasledujúcej definícii.

**Definícia 4.4.** Hovoríme, že rozdelenie pravdepodobnosti $F$ $n$ nezávislých náhodných premenných $X_1, \dots X_n$ je *subexponenciálne rozdelenie*, ak platí:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(\sum_{i=1}^{n} X_i > x)}{P(\max_{1 \leq k \leq n} X_k > x)} = 1 \text{ pre každé } n \geq 2 \qquad (4.9)$$

Táto trieda rozdelení je známa aj ako princíp jedného veľkého skoku.

Vzťah medzi subexponenciálnymi rozdeleniami a rozdeleniami s dlhými chvostami je taký, že každé subexponenciálne rozdelenie je zároveň rozdelením s dlhým chvostom, avšak naopak to neplatí.

Pre študovanie extrémnych udalostí je najdôležitejšia práve táto trieda rozdelení a patria sem všetky štyri rozdelenia zo skupiny rozdelení s ťažkým pravým chvostom.

## 4.4 Ďalšie triedy rozdelení

Okrem týchto tried rozdelení sa môžeme stretnúť ešte s ďalšími - s triedou regulárne sa meniacich rozdelení a s triedou rozdelení s dominantne sa meniacimi chvostami.

**Definícia 4.5.** Hovoríme, že rozdelenie náhodnej premennej $X$ je *regulárne sa meniace rozdelenie*, ak platí:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-\alpha} \text{ pre každé } t > 0 \text{ a nejaké } \alpha > 0 \qquad (4.10)$$

Vzťah medzi regulárne sa meniacimi rozdeleniami a subexponenciálnymi rozdeleniami je taký, že každé regulárne sa meniace rozdelenie je zároveň subexponenciálne rozdelenie, avšak naopak to neplatí.

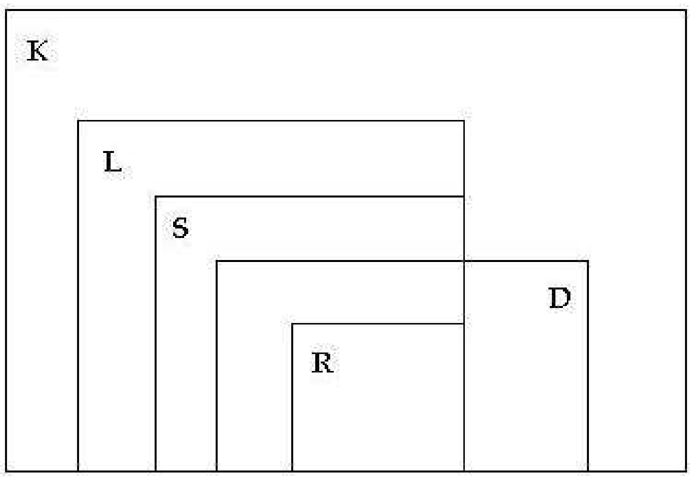
Do tejto triedy rozdelení patria rozdelenia mocninné, ako napríklad Paretovo rozdelenie alebo log-gama rozdelenie, avšak Weibullovo a lognormálne rozdelenie sem nepatria.

**Definícia 4.6.** Hovoríme, že rozdelenie náhodnej premennej $X$ je *rozdelenie s dominantne sa meniacimi chvostami*, ak platí:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(cx)}{\bar{F}(x)} < \infty \text{ pre každé } 0 < c < 1 \tag{4.11}$$

Vzťah medzi regulárne sa meniacimi rozdeleniami a rozdeleniami s dominantne sa meniacimi chvostami je taký, že každé regulárne sa meniace rozdelenie je zároveň rozdelením s dominantne sa meniacimi chvostami, avšak naopak to neplatí.

Aby boli vzťahy medzi jednotlivými triedami názornejšie, sú zobranené na nasledujúcom obrázku 4.1, kde $K$ je trieda rozdelení s ťažkými chvostami, $L$ trieda rozdelení s dlhými chvostami, $S$ trieda subexponenciálnych rozdelení, $D$ trieda rozdelení s dominantne sa meniacimi chvostami a $R$ trieda regulárne sa meniacich rozdelení.




Obr. 4.1: Triedy rozdelení s ťažkými chvostami

Základné definície z tejto kapitoly pochádzajú z [13] a [19], vzťahy medzi jednotlivými triedami sú popísané napríklad v [4].

# Kapitola 5

# Teória ruinovania

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali najprv rozdeleniami popisujúcimi počet poistných udalostí a potom rozdeleniami popisujúcimi individuálne poistné plnenia. Teória ruinovania sa zaoberá modelmi kolektívneho rizika pre určité dlhšie časové obdobie. V tejto kapitole si priblížime túto problematiku a doteraz najvýznamnejší výsledok z tejto oblasti, a to Lundbergovu nerovnosť. Pri spracovaní tejto časti sme použili zdroje [1], [2], [12] a [14].

## 5.1 Základné pojmy

Slovo *riziko* je bežne používané vo význame portfólio poistiek, v tejto práci bude predstavovať buď jednotlivé poistky alebo ich súbor.

Teória ruinovania je postavená na základnom modeli nazývanom *model prebytku* a na jeho popísanie si najprv uvedieme označenia niektorých premenných:

- $N(t)$ predstavuje počet všetkých poistných udalostí v časovom intervale $\langle 0, t\rangle$ pre každé $t \geq 0$
- $X_i$ je výška $i$-tej poistnej udalosti pre $i = 1, 2, 3, \dots$
- $S(t)$ označuje výšku celkového poistného plnenia v časovom intervale $\langle 0, t\rangle$ pre každé $t \geq 0$

$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť náhodných premenných,$\{N(t)\}_{t\geq 0}$ a $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sú stochastické procesy v spojitom čase.

Na základe tohto označenia môžeme písať, že

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{5.1}$$

pričom rozumieme, že $S(t) = 0$, ak $N(t) = 0$ a $S(t)$ nazývame tiež *proces celkovej výšky poistných plnení.*

Náhodné premenné $N(1)$ a $S(1)$ predstavujú počet poistných plnení a celkovú výšku poistných plnení v časovom intervale jednotkovej dĺžky.

Nasledujúci predpoklad je určitou konvenciou v teórii ruinovania (ale aj v iných): budeme predpokladať, že poistné je prijímané spojite s konštantnou mierou a označovať ju $c$ za jednotku času, teda celkové poistné prijaté za časový interval $\langle 0, t\rangle$ je $ct$.

Navyše predpokladáme, že poisťovňa má na začiatku určitú finančnú čiastku, ktorú označujeme $U$ a nazýva sa *počiatočný prebytok* alebo tiež *rezervný fond.* Prebytok poisťovne v každom budúcom okamihu $t(> 0)$ je náhodná premenná, ktorej hodnota závisí od poistných udalostí do času $t$.

*Model prebytku poisťovne* má nasledovný tvar:

$$U(t) = U + ct - S(t) \tag{5.2}$$

a slovne ho môžeme interpretovať, že prebytok poisťovne v čase $t$ je počiatočný prebytok zvýšený o prijaté poistné do času $t$ a znížený o celkovú výšku poistných plnení do času $t$.

Tento model platí pre každé $t \geq 0$, pričom $U(0) = U$. Na základe tohto modelu je zrejmé, že pre pevnú hodnotu $t$ je $U(t)$ náhodná premenná, pretože $S(t)$ je náhodná premenná. Ak nás zaujíma priebeh náhodnej premennej $U(t)$ pre $t \geq 0$, potom $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ je stochastický proces a nazýva sa *proces prebytku* (alebo tiež *surplus proces*).

Je zrejmé, že tento model nezodpovedá presne finančným tokom poisťovne, keďže používa nasledujúce zjednodušenia:

- neuvažujeme žiaden možný úrok z prebytku poisťovne,
- ako už bolo spomenuté, predpokladáme, že poistné je platené spojite a rastie lineárne,
- predpokladáme tiež, že všetky poistné plnenia sú vyplatené okamžite po vzniku nároku.

Napriek týmto zjednodušeniam však na základe tohto modelu môžeme získať veľmi dôležité informácie pre pravdepodobnosti zruinovania poisťovne.

## 5.2 Pravdepodobnosť zruinovania v spojitom čase

Slovo *zruinovanie* je v oblasti teórie ruinovania používané na vyjadrenie okamihu, kedy prebytok poisťovne $U(t)$ prvýkrát nadobudne zápornú hodnotu.
Z pohľadu poisťovne je dôležité poznať *pravdepodobnosť zruinovania* a takisto možnosti, ako ju regulovať a udržiavať v stanovených hraniciach.

**Definícia 5.1.** *Pravdepodobnosťou zruinovania* $\Psi(U)$ *v nekonečnom časovom horizonte* $(0, \infty)$ označujeme pravdepodobnosť
$\Psi(U) = P[U(t) < 0$ pre nejaké $t$, $0 < t < \infty]$.
*Pravdepodobnosťou zruinovania* $\Psi(U,t)$ *v konečnom časovom horizonte* $(0, t\rangle$ označujeme pravdepodobnosť $\Psi(U,t) = P[U(\tau) < 0$ pre nejaké $\tau$, $0 < \tau < t]$.

V nasledujúcej vete sú uvedené základné vzťahy medzi týmito pravdepodobnosťami pre $0 < t_1 < t_2 < \infty$ a pre $0 \leq U_1 \leq U_2$.

**Veta 5.1.** *Základné vzťahy:*

1. $\Psi(U_2, t) \leq \Psi(U_1, t)$
2. $\Psi(U_2) \leq \Psi(U_1)$
3. $\Psi(U, t_1) \leq \Psi(U, t_2) \leq \Psi(U)$
4. $\lim_{t \to \infty} \Psi(U, t) = \Psi(U)$

Slovne môžeme túto vetu interpretovať tak, že zvyšovanie počiatočného rezervného fondu znižuje pravdepodobnosť zruinovania v konečnom i nekonečnom časovom horizonte a predlžovanie časového intervalu zvyšuje pravdepodnosť zruinovania v konečnom čase a tá sa približuje k pravdepodobnosti zruinovania v nekonečnom čase.

## 5.3 Pravdepodobnosť zruinovania v diskrétnom čase

**Definícia 5.2.** *Pravdepodobnosťou zruinovania* $\Psi_h(U)$ *v nekonečnom časovom horizonte* $(0,\infty)$ *s časovou jednotkou* $h$ označujeme pravdepodobnosť $\Psi_h(U) = P[U(nh) < 0 \text{ pre nejaké } n = 1, 2, 3, \ldots]$. *Pravdepodobnosťou zruinovania* $\Psi_h(U,t)$ *v konečnom časovom horizonte* $(0,t\rangle$ *s časovou jednotkou* $h$ označujeme pravdepodobnosť $\Psi_h(U,t) = P[U(nh) < 0 \text{ pre nejaké } n = 1, 2, \ldots, \frac{t}{h}]$.

Táto pravdepodobnosť zruinovania sa viac približuje potrebám praxe, keďže za časovú jednotku zvyčajne používame napr. týždeň, mesiac, rok.

Pre pravdepodobnosti zruinovania v diskrétnom čase platia podobné vzťahy ako pre spojitý čas, ktoré sú uvedené vo Vete 5.1.

Nasledujúca veta nám približuje vzťahy medzi pravdepodobnosťami zruinovania v spojitom a diskrétnom čase:

**Veta 5.2.** *Základné vzťahy:*

1. $\Psi_h(U,t) \leq \Psi(U,t) \leq \Psi(U)$
2. $\Psi_h(U) \leq \Psi(U)$
3. $\lim\limits_{h\to 0} \Psi_h(U,t) = \Psi(U,t)$
4. $\lim\limits_{h\to 0} \Psi_h(U) = \Psi(U)$

Prirodzená slovná interpretácia hovorí, že pravdepodobnosť zruinovania v diskrétnom čase môžeme zhora ohraničiť pravdepodobnosťou zruinovania v spojitom čase a v limitnom prípade sa rovnajú, čo platí aj pre konečný aj nekonečný časový horizont.

## 5.4 Poissonov a zložený Poissonov proces

**Definícia 5.3.** Stochastický proces $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ je *Poissonov proces* s parametrom $\lambda$, ak sú splnené nasledovné podmienky:

1. $N(0) = 0$ a $N(s) \leq N(t)$ pre ľubovoľné $s < t$.
2. $P[N(t+h) = r \mid N(t) = r] = 1 - \lambda h + o(h)$,
   $P[N(t+h) = r+1 \mid N(t) = r] = \lambda h + o(h)$,
   $P[N(t+h) > r+1 \mid N(t) = r] = o(h)$,
   pričom $o(h)$ je funkcia, pre ktorú platí, že $\lim\limits_{h\to 0} o(h) = 0$.
3. Ak $s < t$, počet poistných plnení v časovom intervale $(s, t\rangle$ nezávisí od počtu poistných plnení pred začiatkom $s$ tohto intervalu.
4. Pre ľubovoľné pevne zvolené $t$ má náhodná premenná $N(t)$ Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda t$.

**Veta 5.3.** *Poissonov proces $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ je sčítací proces, teda spĺňa nasledujúce podmienky:*

1. *$N(0) = 0$.*
2. *Pre ľubovoľné $t > 0$ je $N(t)$ celočíselná hodnota.*
3. *Ak $s < t$, potom $N(s) \leq N(t)$, t.j. počet poistných plnení je v čase neklesajúci.*
4. *Ak $s < t$, potom $N(t) - N(s)$ je počet poistných plnení v časovom intervale $(s, t\rangle$.*

**Definícia 5.4.** Stochastický proces celkových poistných plnení $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ nazývame *zložený Poissonov proces* s parametrom $\lambda$, ak sú splnené nasledovné podmienky:

1. Individuálne poistné plnenia tvoria postupnosť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislých rovnako rozdelených náhodných premenných.

2. Náhodné premenné $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú nezávislé od počtu poistných plnení $N(t)$ pre ľubovoľné $t \geq 0$.

3. Proces počtu poistných plnení $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ je Poissonov proces s parametrom $\lambda$.

## 5.5 Cramérova - Lundbergova veta

Z pohľadu poisťovne je dôležité vedieť určiť pravdepodobnosť zruinovania (či už uvažujeme diskrétny alebo spojitý model), avšak to v praxi nie je vždy možné, hlavne v prípadoch, keď sa na modelovanie používajú zložitejšie rozdelenia pravdepodobnosti. Preto sa často využíva stanovenie hornej hranice pravdepodobnosti zruinovania v nekonečnom časovom horizonte, ktoré je dané Lundbergovou nerovnosťou.

Uvažujme model prebytku uvedený v (5.2), pričom proces celkového poistného plnenia $S(t)$ je zložený Poissonov proces $CoPo(\lambda t, F(x))$, kde $F(x)$ označuje spoločnú distribučnú funkciu rovnako rozdelených náhodných premenných $X_i$.

V prípade, že intenzita prijatého poistného $c$ je menšia alebo rovnaká ako stredná hodnota očakávaného poistného plnenia $\lambda E(X)$, pravdepodobnosť zruinovania poisťovne $\Psi(U) = 1$ pri ľubovoľnej výške počiatočného rezervného fondu.

Preto budeme predpokladať, že platí:

$$c > \lambda E(X), \tag{5.3}$$

teda že v jednotkovom časovom intervale je prijaté poistné vyššie ako výška poistného plnenia. Ak by sme uvažovali princíp výpočtu poistného na základe strednej hodnoty, môžeme prijaté poistné vyjadriť nasledovne:

$$c = (1 + \theta)\ \lambda E(X), \tag{5.4}$$

kde $\theta > 0$ je riziková prirážka k čistému poistnému.

V prípade uvedených predpokladov pre pravdepodobnosť zruinovania v nekonečnom časovom horizonte môžeme sformulovať Crámerovu - Lundbergovu vetu [13]:

**Veta 5.4.** *Predpokladajme, že existuje $R > 0$ také, že:*

$$\int_0^\infty e^{Rx}\ \bar{F}(x)\ dx = \frac{c}{\lambda} \tag{5.5}$$

*Potom platí Lundbergova nerovnosť:*

$$\Psi(U) \leq e^{-RU}, \textit{pre každé } U \geq 0 \tag{5.6}$$

*kde $U$ predstavuje výšku počiatočného rezervného fondu a $R$ je koeficient korekcie (z anglického* adjustment coefficient*) vyjadrujúci mieru rizika procesu prebytku.*

*Ak je navyše splnená podmienka:*

$$\int_0^\infty x\ e^{Rx}\ \bar{F}(x)\ dx < \infty, \tag{5.7}$$

*potom platí:*

$$\lim_{U\to\infty} e^{RU}\ \Psi(U) = C < \infty, \tag{5.8}$$

*kde*

$$C = \left[\frac{R}{\theta E(X)} \int_0^\infty x\ e^{Rx}\ \bar{F}(x)\ dx\right]^{-1} \tag{5.9}$$

Je teda zrejmé, že je nevyhnutná existencia koeficientu korekcie $R > 0$.

V poistnej sfére sa pravá strana nerovnosti (5.6) používa ako aproximácia pravdepodobnosti zruinovania poisťovne, pričom je očividné, že táto sa znižuje s rastúcou hodnotou koeficientu $R$.

Implicitná rovnica na vyjadrenie koeficientu korekcie pre zložený Poissonov proces má tvar:

$$\lambda + cr = \lambda \int_0^\infty e^{rx} f(x)\ dx = \lambda M_x(r), \tag{5.10}$$

kde $M_x(r)$ je momentová vytvárajúca funkcia náhodných premenných $X$ v bode $r$.

Ekvivalentné vyjadrenie tejto rovnice použitím rizikovej prirážky je takéto:

$$1 + (1+\theta)\ E(X)\ r = M_x(r). \tag{5.11}$$

Táto rovnica má dve riešenia, jedno triviálne $r = 0$ a druhé kladné $r = R$, ktoré sa nazýva koeficient korekcie. Na základe rovnice (5.11) vidíme, že $R$ závisí len od rizikovej prirážky $\theta$ a rozdelenia výšky individuálnych poistných plnení $X_i$.

Na jednoznačnú aproximáciu pravdepodobnosti zruinovania je potrebné poznať hodnotu parametra $R$, avšak vo väčšine prípadov rovnica (5.11) nemá explicitné riešenie a je potrebné použiť vhodné numerické metódy na jeho nájdenie. Výnimku tvorí exponenciálne rozdelenie, teda ak uvažujeme, že individuálne nároky majú $Exp\ (\alpha)$, potom hodnota koeficientu korekcie $R$ je $\frac{\alpha\theta}{(1+\theta)}$.

Na základe rovnice (5.10) vidíme, že na vyjadrenie koeficientu korekcie je nutné poznať momentovú vytvárajúcu funkciu. Avšak v prípade rozdelení s ťažkými chvostami momentová vytvárajúca funkcia neexistuje, teda koeficient korekcie takisto neexistuje. Tým pádom nie sú splnené predpoklady Cramérovej - Lundbergovej vety, a preto sa nedá použiť. To ale neznamená, že nie je možné pravdepodobnosť zruinovania určiť presne alebo aspoň odhadnúť.

V prípade niektorých tried rozdelení uvedených v štvrtej kapitole sú už dokázané určité asymptotické odhady pravdepodobnosti zruinovania v nekonečnom časovom horizonte.

**Veta 5.5.** *Pre triedu regulárne sa meniacich rozdelení sa dá pravdepodobnosť zruinovania v nekonečnom časovom horizonte vyjadriť* *pomocou chvosta rozdelenia nasledovne:*

$$\lim_{U\to\infty} \Psi(U) = \frac{1}{\theta E(X)} \int\limits_0^\infty \bar{F}(y)\ dy \tag{5.12}$$

Pre rozšírenie tejto vety na triedu subexponenciálnych rozdelení si najprv definujeme pojem integrovaného chvosta.

**Definícia 5.5.** Nech $F(x)$ je distribučná funkcia rozdelenia náhodnej premennej a $\bar{F}(x)$ je chvost definovaný vzťahom (4.1). Potom *integrovaný chvost* je definovaný vzťahom:

$$F_I(x) = \frac{1}{E(X)} \int\limits_0^x \bar{F}(y)\ dy, x \geq 0 \tag{5.13}$$

**Veta 5.6.** *Pre triedu subexponenciálnych rozdelení s konečnou strednou hodnotou E(X) platí, že ak rozdelenie integrovaného chvosta* $F_I(x)$ *je tiež z triedy subexponenciálnych rozdelení, tak pre pravdepodobnosť zruinovania v nekonečnom časovom horizonte platí:*

$$\lim_{U\to\infty} \frac{\Psi(U)}{F_I(U)} = \frac{1}{\theta} \tag{5.14}$$

Overenie podmienky, že rozdelenie integrovaného chvosta je z triedy subexponenciálnych rozdelení je v praxi často veľmi náročné, pretože neplatí priama závislosť medzi $F(x)$ a $F_I(x)$, teda ak je $F(x)$ z triedy subexponenciálnych rozdelení, nemusí byť aj $F_I(x)$ z triedy subexponenciálnych rozdelení a naopak.

Platí však tvrdenie, že ak je rozdelenie z triedy s dominantne sa meniacimi chvostami a má konečnú strednú hodnotu, potom rozdelenie integrovaného chvosta je subexponenciálne a táto podmienka sa overuje jednoduchšie.

Ak sa pozrieme na rozdelenia, ktoré sa využívajú v oblasti neživotného poistenia na modelovanie výšky poistných plnení, tak predpoklady poslednej vety (5.6) spĺňajú všetky rozdelenia s ťažkými chvostami uvedené v časti (4.1), teda Paretovo, Weibullovo, lognormálne i log-gama rozdelenie.

Na odhadnutie pravdepodobnosti zruinovania je niekedy výhodné použiť aj iné metódy, a preto v nasledujúcej časti uvedieme jednu zo známych metód, a to metódu Laplaceovej trasformácie, ktorej stručnú verziu je možné nájsť napríklad v [5].

## 5.6 Metóda Laplaceovej transformácie

Laplaceova transformácia má rôzne formy využitia, napríklad na vyjadrenie potrebných konvolúcií na stanovenie rozdelenia celkových poistných plnení, ale taktiež ako prostriedok riešenia diferenciálnych alebo integrálno-diferenciálnych rovníc.

**Definícia 5.6.** Nech $f_X(x)$ je funkcia definovaná pre všetky reálne $x \geq 0$. *Laplaceovu transformáciu* funkcie $f_X(x)$ budeme označovať $L_{f_X}$ a je definovaná ako:

$$L_{f_X}(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f_X(x)\, dx. \tag{5.15}$$

Pri odvodzovaní vzťahu na odhad pravdepodobnosti zruinovania využijeme niektoré vlastnosti Laplaceovej transformácie, ktoré sú uvedené v nasledujúcich vetách.

**Veta 5.7.** *Laplaceova trasformácia spĺňa podmienku lineárnosti, teda ak pre funkcie $f_{X_1}(x)$ a $f_{X_2}(x)$ existuje Laplaceova trasformácia, potom pre každé $a_1, a_2 \in R$ platí:*

$$\int_0^\infty e^{-zx}(a_1 f_{X_1}(x) + a_2 f_{X_2}(x))\, dx = L_{f_{X_1}}(z) + L_{f_{X_2}}(z) \tag{5.16}$$

**Veta 5.8.** *Laplaceova trasformácia z integrálu sa určí takto: nech pre funkciu $f_X(x)$ existuje Laplaceova trasformácia a nech $F(x) = \int_0^x f_X(t)\, dt$. Potom*

$$L_{F_X}(z) = \frac{L_{f_X}(z)}{z} \tag{5.17}$$

**Veta 5.9.** *Laplaceova trasformácia z derivácie sa určí takto: nech funkcia $f_X(x)$ je diferencovateľná a existuje pre ňu Laplaceova trasformácia. Potom*

$$\int_0^\infty e^{-zx} f'_X(x)\ dx = zL_{f_X}(z) - f_X(0) \tag{5.18}$$

**Veta 5.10.** *Laplaceova trasformácia z konvolúcie sa určí takto: nech $S = X_1 + X_2$, nech pre funkcie $f_{X_1}(x)$ a $f_{X_2}(x)$ existuje Laplaceova trasformácia a definujme*

$$f_s(x) = \int_0^x f_{X_1}(y)\ f_{X_2}(x-y)\ dy$$

*Potom Laplaceova transformácia $S$ má tvar:*

$$L_{f_s}(z) = L_{f_{X_1}}(z)\ L_{f_{X_2}}(z) \tag{5.19}$$

Aplikujeme teraz túto metódu na odhadovanie pravdepodobnosti zruinovania. Začneme tým, že si explicitne vyjadríme $\Psi(U)$, pričom využijeme prechod cez $\Phi(U) = 1-\Psi(U)$, teda cez pravdepodobnosť, že zruinovanie pri výške počiatočného prebytku $U$ nikdy nenastane.

Ak uvažujeme čas nastatia prvej poistnej udalosti a jej výšku ako parametre pre výpočet pravdepodobnosti $\Phi(U)$, potom skutočnosť, že prvá poistná udalosť nastala v čase $t$ a jej veľkosť nepresahuje $U + ct$, môžeme vyjadriť vzťahom:

$$\Phi(U) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{U+ct} f_X(x)\ \Phi(U+ct-x)\ dx\ dt \tag{5.20}$$

Zavedením substitúcie $s = U + ct$ dostaneme:

$$\Phi(U) = \frac{1}{c} \int_U^\infty \lambda e^{-\lambda \frac{s-U}{c}} \int_0^s f_X(x)\ \Phi(s-x)\ dx\ ds =$$

$$= \frac{1}{c}\ e^{\frac{\lambda U}{c}} \int_U^\infty \lambda e^{\frac{-\lambda s}{c}} \int_0^s f_X(x)\ \Phi(s-x)\ dx\ ds \tag{5.21}$$

Diferencovaním vzťahu (5.21) a eliminovaním integrálu dostaneme diferenciálnu rovnicu druhého rádu, ktorej riešenie je potrebné na explicitné vyjadrenie funkcie $\Phi$.

Aplikáciou vzťahu $\Phi(U) = 1 - \Psi(U)$ v rovnici, ktorá vznikne deriváciou vzťahu (5.21), dostaneme:

$$\Psi(0) = \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^\infty (1 - F_X(u))\ du = \frac{\lambda}{c}\ E(X) \qquad (5.22)$$

Na vyjadrenie Laplaceovej transformácie funkcie $\Phi$ potrebujeme vyjadriť deriváciu rovnice (5.21).

$$\frac{d}{dU}\ \Phi(U) = \frac{\lambda}{c}\ \Phi(U) - \frac{\lambda}{c} \int\limits_0^U f_X(x)\ \Phi(U - x)\ dx \qquad (5.23)$$

Podľa tretej vlastnosti Laplaceovej transformácie, teda podľa vzťahu (5.18), vyjadríme ľavú stranu rovnice (5.23) a dostaneme:

$$\int\limits_0^\infty e^{-zU} \left( \frac{d}{dU}\ \Phi(U) \right) dU = z\ L_\Phi(z) - \Phi(0) \qquad (5.24)$$

Na základe lineárnosti Laplaceovej transformácie (5.18) a aplikáciou vzťahu (5.19) na druhý člen na pravej strane rovnice (5.23) môžeme písať:

$$z\ L_\Phi(z) - \Phi(0) = \frac{\lambda}{c}\ L_\Phi(z) - \frac{\lambda}{c}\ L_\Phi(z)\ L_{f_X}(z) \qquad (5.25)$$

Laplaceovu transformáciu funkcie $\Phi$ môžeme teda vyjadriť v tvare:

$$L_\Phi(z) = \frac{c\ \Phi(0)}{cz - \lambda\,(1 - L_{f_X}(z))}\ ,\ \text{kde}\ \Phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}\ E(X) \qquad (5.26)$$

Odhad pravdepodobnosti zruinovania dostaneme invertovaním Laplaceovej trasformácie uvedenej v (5.26), na čo je pre konkrétne rozdelenia často potrebné použiť určité numerické metódy, avšak takto získaný odhad je presnejší ako odhad získaný pomocou Lundbergovej nerovnosti.

Aplikujeme teraz tento postup pre jedno z rozdelení s ťažkými chvostami, a to Paretovo rozdelenie, presnejšie jeho americkú verziu.

Na vyjadrenie Laplaceovej transformácie pravdepodobnosti zruinovania $\Phi(U)$ potrebujeme Laplaceovu trasformáciu hustoty rozdelenia výšky poistných plnení, keďže $f_X(x)$ zodpovedá v tomto prípade práve hustote amerického Paretovho rozdelenia, ktorá je definovaná v definícii 3.5. Takže v tomto prípade bude mať Laplaceova transformácia nasledovný tvar:

$$L_{f_X}(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\ f_X(x)\ dx = \int_0^\infty e^{-zx}\ \frac{\alpha b^\alpha}{(b+x)^{\alpha+1}}\ dx =$$

$$= \alpha\ b^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-zx}}{(b+x)^{\alpha+1}}\ dx = \alpha\ b^\alpha\ e^{bz}\ z^\alpha\ \Gamma(-\alpha, bz), \quad (5.27)$$

kde $\Gamma(-\alpha, bz)$ je horná neúplná gama funkcia definovaná vzťahom: $\int_{bz}^{\infty} y^{-\alpha-1}\ e^{-y}\ dy$.

Keďže tento vzťah je značne komplikovaný, nie je možné nájsť explicitné riešenie inverzie Laplaceovej transformácie, je potrebné použiť nejakú spomedzi známych numerických metód.

Výsledky pre konkrétne hodnoty počiatočného rezervného fondu $U$ a pre hodnoty parametrov $\alpha = 2$, $b = 1$, $\lambda = 1$, $c = 1,1$ sú uvedené v nasledujúcej tabuľke 5.1.

Tieto výsledky pochádzajú zo zdrojov [3], [9] a [16].

Môžeme teda vidieť, že výsledky v prípade použitých dvoch metód sú takmer rovnaké a zhodujú sa s prirodzenými očakávaniami. Teda pri nízkej hodnote počiatočného rezervného fondu je pravdepodobnosť zruinovania vysoká a postupne so zväčšujúcou sa hodnotou počiatočného rezervného fondu sa táto pravdepodobnosť znižuje.

| U | $\Psi(U)_1$ | $\Psi(U)_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,90909 | 0,90909 |
| 2 | 0,81023 | 0,81023 |
| 4 | 0,74976 | 0,74976 |
| 10 | 0,62713 | 0,62713 |
| 20 | 0,49814 | 0,49814 |
| 30 | 0,41144 | 0,41144 |
| 40 | 0,34789 | 0,34789 |
| 50 | 0,29916 | 0, 29916 |
| 100 | 0,16486 | 0,16486 |
| 500 | 0,02512 | 0,02512 |
| 1000 | 0,01134 | 0,01135 |

Tabuľka 5.1: Pravdepodobnosť zruinovania pre Paretovo rozdelenie

Podobne by sme mohli vyjadriť pravdepodobnosť zruinovania v závislosti od počiatočného rezervného fondu pre iné hodnoty parametrov, prípadne iné rozdelenia, avšak výpočtová časť v takýchto prípadoch je už značne náročná a bez použitia softvéru to nie je možné.

# Kapitola 6

# Postup pri modelovaní výšky poistných plnení

V predchádzajúcich kapitolách sme uviedli teoretické poznatky z oblasti teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky, ktoré sú základom pre modelovanie skutočných dát či už v oblasti neživotného poistenia alebo aj v iných oblastiach.

Táto kapitola je venovaná samotnému postupu, ako je možné výšku poistných plnení modelovať. Najprv je uvedený všeobecný postup a v ďalšej kapitole je praktická ukážka, ako je možné uskutočniť analýzu reálnych dát, ako postupovať pri hľadaní najvhodnejšieho rozdelenia na modelovanie výšky poistných plnení. Čerpali sme hlavne z [8] a [12].

Vo všeobecnosti proces voľby pravdepodobnostného rozdelenia pozostáva z troch krokov:

- výber rozdelenia pravdepodobnosti,
- odhad príslušných parametrov rozdelenia,
- otestovanie zhody zvoleného rozdelenia s dátami.

## 6.1 Prvotná voľba rozdelenia

Na to, aby sme si zvolili rozdelenie, ktoré môže byť pre naše dáta vhodné, je potrebné najprv si vytvoriť určitú predstavu o dátach.

Na to sa najčastejšie používa grafické znázornenie v podobe histogramu spolu so základnými popisnými charakteristikami, ako sú stredná hodnota, disperzia, či jednotlivé kvantily rozdelenia. My sa budeme snažiť zistiť, či je vhodné pre výšku poistných plnení za určité obdobie použiť niektoré z rozdelení s ťažkými chvostami.

## 6.2 Metódy odhadu parametrov

Po zvolení určitého rozdelenia je v druhej fáze potrebné určiť hodnotu parametra, prípadne viacerých parametrov, od ktorých závisí zvolené rozdelenie. My však máme k dispozícii iba určitý výberový súbor poistných plnení, preto je možné nájsť iba odhady parametrov rozdelení. Medzi základné typy patria bodové odhady a intervalové odhady, my sa budeme venovať prvej skupine, ktorá je v našom prípade vhodnejšia a postačujúca. Presné definície i vlastnosti týchto typov odhadov je možné nájsť v [8].

### 6.2.1 Metóda maximálnej vierohodnosti

V oblasti teórie odhadov je známych viacero metód používaných na odhad parametrov. Metóda maximálnej vierohodnosti je spomedzi nich najznámejšia, má široké možnosti použitia a jej výsledky majú dobré vlastnosti v porovnaní s inými metódami, v určitom zmysle môžeme takto získané odhady považovať za asymptoticky optimálne. Táto metóda je založená na funkcii vierohodnosti, ktorá je definovaná pomocou hustoty daného rozdelenia.

**Definícia 6.1.** Nech $(X_1, X_2, \dots X_n)'$ je náhodný výber z rozdelenia s hustotou $f(x,\theta)$, kde $\theta$ je neznámy jednorozmerný parameter z $\Theta$ a nech $(x_1, x_2, \dots x_n)'$ je jeho realizácia. *Funkcia vierohodnosti* je definovaná vzťahom:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \tag{6.1}$$

Ak existuje taký bod $\hat{\theta}$ z parametrického priestoru $\Theta$, že pre všetky $\theta \in \Theta$ platí:

$$L(x,\theta) \leq L(x,\hat{\theta}), \tag{6.2}$$

potom $\hat{\theta}$ sa nazýva *maximálne vierohodný odhad* parametra $\theta$.

V prípade, že je potrebné odhadovať viacrozmerný parameter, je takisto možné použiť túto metódu a jej bližšie vysvetlenie je možné nájsť napríklad v [8].

### 6.2.2 Metóda momentov

V prípade niektorých rozdelení (napríklad Paretovho rozdelenia) je vyčíslenie maximálne vierohodných odhadov parametrov numericky náročné a je výhodnejšie použiť druhú metódu, metódu momentov.

Táto metóda je jednou z najstarších a je pomerne jednoduchá. Jej princíp spočíva v tom, že charakteristiky základného súboru sa nahradia zodpovedajúcimi výberovými charakteristikami.

**Definícia 6.2.** Nech $(X_1, X_2, \dots X_n)'$ je náhodný výber z rozdelenia, ktoré závisí od $r$ neznámych parametrov $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)'$, $r \geq 1$. Nech pre každý parameter $\theta \in \Theta$ existujú začiatočné momenty $m_k(\theta) = E(X_i^k)$ pre $k = 1, 2, \dots, r$. Nech výberové začiatočné momenty sú definované vzťahom:

$$m_k' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \text{ pre } k = 1, 2, \dots \tag{6.3}$$

*Odhady parametrov $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ metódou momentov* sú definované ako riešenia rovníc:

$$m_k(\hat{\theta}) = m_k' \text{ pre } k = 1, 2, \dots r. \tag{6.4}$$

V prípade, že prvých $r$ rovníc nie je postačujúcich na jednoznačné určenie odhadov, je možné pridať ďalšie rovnice, avšak iba ak existujú príslušné momenty $m_k(\theta)$.

Odhady získané touto metódou vo všeobecnosti nemajú dobré vlastnosti, preto sa často používajú len ako počiatočné aproximácie. Navyše v prípade, že potrebujeme odhadnúť parametre rozdelenia, ktoré nemá konečné momenty, túto metódu nemôžeme použiť vôbec.

### 6.2.3 Metóda kvantilov

V niektorých situáciách je numericky veľmi zložité použitie aj metódy maximálnej vierohodnosti aj metódy momentov (ako napríklad v prípade Weibullovho rozdelenia) a vtedy je výhodné použiť tretiu metódu, metódu kvantilov.

Princíp tejto metódy je založený na nahradení kvantilov, resp. percentilov príslušnými charakteristikami z výberového súboru.

**Definícia 6.3.** Nech $(X_1, X_2, \dots X_n)'$ je náhodný výber z rozdelenia s distribučnou funkciou $F(x, \theta)$ s neznámym vektorom parametrov $\theta \in \Theta$. *Odhady parametrov metódou kvantilov* nájdeme riešením rovníc:

$$F(q_k) = \frac{k}{100} \text{ pre } k = 1, 2, \dots, r, \tag{6.5}$$

kde $q_k$ sú kvantily určené vo výberovom súbore a $r$ je počet parametrov, ktoré odhadujeme.

Ak teda potrebujeme odhadnúť napríklad $r$ neznámych parametrov, potrebujeme určiť $r$ kvantilov z výberového súboru a na základe nich potom riešiť sústavu $r$ rovníc. V praxi sa na odhad jedného parametra používa najčastejšie medián, na odhad dvoch parametrov dolný a horný kvartil $(q_{25},\ q_{75})$ a podobne.

Ako sme na začiatku tejto časti uviedli, pre všetky parametre rozdelení s ťažkými chvostami, ktoré sa používajú na odhadovanie výšky poistných plnení v neživotnom poistení, je najlepšie použiť metódu maximálnej vierohodnosti a na eliminovanie prípadných numerických problémov je výhodné použiť dostupný softvér. Preto aj my pri analýze konkrétnych dát použijeme túto metódu.

Samozrejme, je možné použiť aj iné metódy odhadov, prípadne ich kombinovať, čím môžeme získať ešte presnejšie výsledky. Napríklad metóda založená na Johnsonovom skóre je vhodná na odhadovanie parametrov niektorých rozdelení s ťažkými chvostami. Bližšie je vysvetlená napríklad v [17], ďalšia z metód je opísaná v [7].

## 6.3 Testy na overenie rozdelenia

V poslednej fáze je potrebné overiť, či zvolené rozdelenie s odhadnutými parametrami dostatočne dobre popisuje naše dáta alebo ho nemôžeme považovať za dobrý model. Potrebujeme teda použiť testy určené na testovanie zhody empirických rozdelení s teoretickými rozdeleniami. Medzi najznámejšie patrí *Pearsonov $\chi^2$- test dobrej zhody* a *Kolmogorovov - Smirnovov neparametrický test.*

### 6.3.1 Pearsonov $\chi^2$- test dobrej zhody

Tento test vo všeobecnosti slúži na overenie zhody empirického rozdelenie, čiže rozdelenia početností výberových údajov, s predpokladaným teoretickým rozdelením pravdepodobnosti s hustotou $f(x, \theta)$, kde $\theta$ je vektor parametrov, ktoré sú zvyčajne odhadnuté z výberového súboru. Je teda jasné, že tento test je veľmi vhodný v našej situácii.

**Definícia 6.4.** Nech $x_1, x_2, \dots x_n$ je postupnosť realizácií náhodného výberu zo základného súboru. Ak ich roztriedime do $k$ skupín s príslušnými empirickými početnosťami $O_1, O_2, \dots O_k$ a teoretickými početnosťami $E_i$, potom *testovacia štatistika* pre test nulovej hypotézy $H_0$, že náhodná premenná $X$ má rozdelenie s hustotou $f(x, \theta)$ má tvar:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \tag{6.6}$$

pričom $E_i = np_i$, kde $n$ je rozsah výberového súboru a $p_i$ je pravdepodobnosť hodnoty $x_i$ diskrétnej náhodnej premennej, resp. pravdepodobnosť intervalu hodnôt $x \in (x_{i-1}, x_i\rangle$ spojitej náhodnej premennej.

Pre teoretické početnosti $E_i$ požadujeme, aby platilo $E_i \geq 5$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, k$. V prípade, že niektorá skupina túto podmienku nespĺňa, zlúčime ju s druhou a upravíme príslušnú pravdepodobnosť.

Takto definovaná testovacia štatistika má za platnosti nulovej hypotézy asymptoticky pre $n \to \infty$ $\chi^2$ - rozdelenie s $(k-1-p)$ stupňami voľnosti, kde $p$ je počet odhadnutých parametrov testovaného teoretického rozdelenia.

Kritická oblasť (teda oblasť zamietnutia nulovej hypotézy) pre test nulovej hypotézy na hladine významnosti $\alpha$ s $(k-1-p)$ stupňami voľnosti je určená nerovnosťou $\chi^2 > \chi^2(k-1-p, \alpha)$, kde $\chi^2(k-1-p, \alpha)$ je kvantil $\chi^2$ - rozdelenia.

Ako už bolo spomenuté, takto definovaná testovacia štatistika má len asympoticky $\chi^2$ - rozdelenie, teda je vhodné tento test používať len pri dostatočne veľkom rozsahu výberového súboru. V prípade, že tento predpoklad nie je splnený, môžeme použiť nasledujúci test.

### 6.3.2 Kolmogorovov - Smirnovov neparametrický test

Tento test je takisto testom dobrej zhody a je založený na porovnávaní hodnôt empirickej a teoretickej distribučnej funkcie. Na rozdiel od predchádzajúceho testu, ktorý používal triedené údaje, tento test používa údaje netriedené, ale usporiadané vzostupne podľa veľkosti.

**Definícia 6.5.** Nech $x_1, x_2, \ldots x_n$ je postupnosť realizácií náhodného výberu zo základného súboru so spojitým rozdelením s distribučnou funkciou $F(x)$ a nech $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ je ich usporiadanie podľa veľkosti. Empirická distribučná funkcia pre usporiadaný náhodný výber má tvar:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{ak } x \leq x_{(1)} \\ \frac{k}{n} & \text{ak } x_{(k)} < x \leq x_{(k+1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 1 & \text{ak } x \geq x_{(n)} \end{cases} \tag{6.7}$$

*Testovacia štatistika* pre test nulovej hypotézy $H_0$, že náhodná premenná $X$ má rozdelenie s distribučnou funkciou $F(x)$ má tvar:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|, \tag{6.8}$$

teda testovacia štatistika je maximálnou absolútnou odchýlkou medzi empirickou a teoretickou distribučnou funkciou.

Keďže podľa predpokladu je distribučná funkcia $F(x)$ spojitá, existuje rozdelenie štatistiky $D_n$, ktoré nezávisí od $F(x)$. Ako kritické hodnoty testu nulovej hypotézy sa používajú kvantily tohto rozdelenia a tieto hodnoty sú tabelované. Ak rozsah výberu je dostatočne veľký ($n > 100$), môžeme využiť asymptotické rozdelenie a kritické hodnoty nahradiť približnými na základe vzťahov:

$$D_{n,\alpha=0,05} = \frac{1,3581}{\sqrt{n}} \qquad D_{n,\alpha=0,01} = \frac{1,6275}{\sqrt{n}} \tag{6.9}$$

Kritická oblasť (teda oblasť zamietnutia nulovej hypotézy) pre test nulovej hypotézy na hladine významnosti $\alpha$ je určená nerovnosťou $D_n > D_{n,\alpha}$.

Ak nám rozsah výberu umožňuje použiť ktorýkoľvek z týchto dvoch testov, Kolmogorovov - Smirnovov test má vyššiu silu testu, čiže je väčšia pravdepodobnosť zamietnutia nulovej hypotézy, ak táto neplatí. Preto my v praktickej časti použijeme práve tento test na overenie výsledkov.

Kolmogorovov - Smirnovov test je univerzálny test, ktorý môžeme použiť pre všetky rozdelenia. Ak by sme však testovali zhodu len s konkrétnym rozdelením, je možné použiť aj iné, špecifickejšie testy. Napríklad v prípade lognormálneho rozdelenia je známy Shapirov - Wilkov test, v prípade Paretovho rozdelenia je alternatívou presný test pomerom vierohodnosti (z anglického *exact likelihood ratio test*) uvedený v [17]. Okrem toho každý softvér poskytuje iné možnosti testovania, takže je možné sa v praxi stretnúť aj s rôznymi ďalšími testami.

# Kapitola 7

# Modelovanie výšky poistných plnení reálnych dát

Teoretické poznatky popísané v predchádzajúcich kapitolách spolu s postupom uvedeným v šiestej kapitole sú dostatočným základom na to, aby sme mohli uskutočniť analýzu konkrétnych dát. Tá nám poskytne názornejšiu intepretáciu celého priebehu analýzy a takisto aj výsledkov a záverov, ktoré z nej vyplývajú.

Získať skutočné informácie o výške poistných plnení jednej zo slovenských komerčných poisťovní nebolo jednoduché a pre zachovanie obchodného tajomstva nebudeme uvádzať presný zdroj, môžeme však zaručiť, že použité dáta sú naozaj skutočné.

Oblasť neživotného poistenia je široká, ako je uvedené v Zákone o poisťovníctve [20] spadá sem poistenie úrazu, poistenie choroby, rôzne typy poistenia škôd či zodpovednosti za škodu, poistenie úveru, kaucie, rôznych finančných strát, poistenie právnej ochrany a ďalšie. Je prirodzené očakávať, že nie vo všetkých týchto oblastiach je rozdelenie výšky poistných plnení charakteristické rovnakými vlastnosťami, a teda na modelovanie týchto plnení nie je vždy najvhodnejšie použiť rozdelenia s ťažkými chvostami, ktorým sa v tejto práci venujeme.

Portfólio, ktoré sme mali k dispozícii, zahŕňalo oblasť cestovného poistenia a poistenia majetku, pričom poistné plnenia boli identifikované typom produktu, resp. typom rizika, ktoré zodpovedalo príslušnému plneniu. Na zabezpečenie dostatočného počtu poistných plnení sme použili obdobie od roku 2001 do roku 2007 v prípade cestovného poistenia a do roku 2008 v prípade poistenia majetku.

Podrobne v tejto časti uvedieme analýzu jedného produktu, konkrétne jedného typu poistenia domácností, ďalšie výsledky iných produktov a rizík už len zhrnieme stručne, keďže postup pri ich zisťovaní bol podobný.

V nasledujúcej tabuľke 7.1 sú uvedené poistné plnenia poistenia domácností v slovenských korunách, na ktorých uskutočníme analýzu.

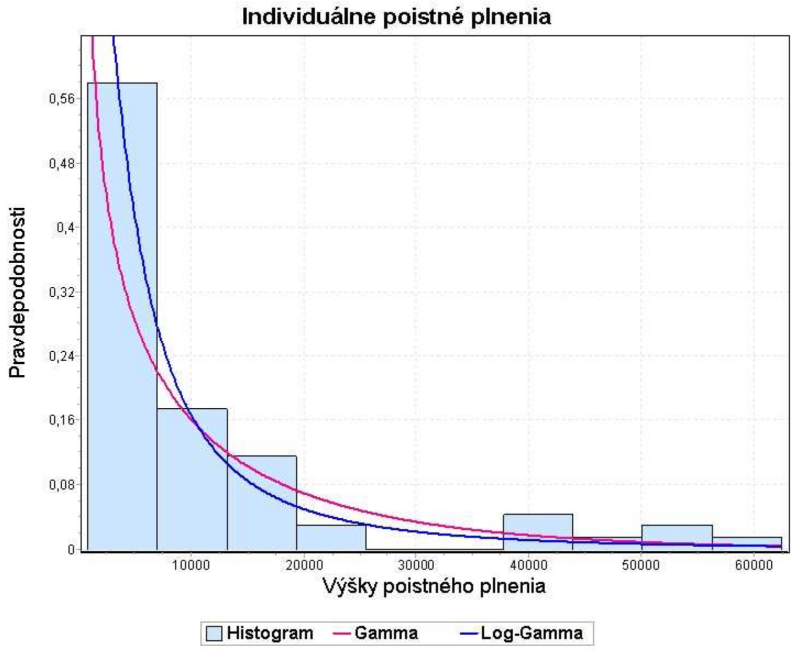
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 850 | 867 | 890 | 900 | 1270 | 1275 | 1351 | 1356 | 1385 | 1390 |
| 1498 | 1503 | 1546 | 1551 | 1565 | 1570 | 1600 | 1635 | 1640 | 1671 |
| 1676 | 2022 | 2375 | 2675 | 2684 | 3175 | 3523 | 3531 | 4068 | 4168 |
| 4200 | 4456 | 4527 | 4532 | 5006 | 5065 | 5481 | 6045 | 6494 | 7003 |
| 7010 | 7245 | 7252 | 7477 | 7484 | 8737 | 8744 | 9197 | 9204 | 9708 |
| 12027 | 12034 | 16370 | 16370 | 16375 | 16377 | 16377 | 16382 | 17605 | 17610 |
| 25318 | 25323 | 38250 | 38524 | 39792 | 48588 | 51529 | 54327 | 62448 | |

Tabuľka 7.1: Výšky poistného plnenia

## 7.1 Prvotná voľba rozdelenia

V súlade s postupom z kapitoly šesť si potrebujeme najprv vytvoriť určitú predstavu o dátach, na čo použijeme grafické znázornenie v podobe histogramu. Zároveň sme do tohto grafu nakreslili krivky hustoty jedného z rozdelení s ľahkými chvostami (gama rozdelenie) a jedného z rozdelení s ťažkými chvostami (log-gama rozdelenie), aby sme zistili, ktorá z týchto dvoch skupín sa zdá vhodnejšia. Graf je znázornený na obrázku 7.1.

Môžeme teda vidieť, že log-gama rozdelenie lepšie popisuje dáta, a preto použijeme na modelovanie triedu rozdelení s ťažkými chvostami, konkrétne spomínané log-gama rozdelenie, obe verzie Paretovho rozdelenia, Weibullovo rozdelenie a lognormálne rozdelenie.




Obr. 7.1: Histogram s krivkou hustoty gama a log-gama rozdelenia

## 7.2 Odhad parametrov

Nasledujúci krok pozostáva z odhadnutia parametrov jednotlivých rozdelení. Ako sme pri charakterizovaní známych metód uviedli, najpresnejšie odhady poskytuje metóda maximálnej vierohodnosti, avšak v prípade niektorých rozdelení je potrebné použiť iteračné metódy na získanie výsledku. V takom prípade sme ako počiatočný odhad použili odhad získaný metódou momentov. Odhady parametrov sú uvedené v nasledovnej tabuľke 7.2.

Keďže pri odhadovaní parametrov je často veľmi náročné vyjadriť explicitné riešenie, je potrebné použiť nejaký softvér, a preto zvolenie metódy na odhadovanie môže byť podmienené možnosťami daného softvéru. My sme použili štatistický program R [6] a program na odhadovanie EasyFitXL [10].

## 7.3 Testy rozdelení

Záverečným krokom je otestovanie zhody teoretických rozdelení s empirickým, na čo použijeme vo všetkých prípadoch Kolmogorovov

| Rozdelenie | Odhady parametrov |
|---|---|
| log-gama | $\hat{\alpha}$=51,967 ; $\hat{\beta}$=6,0639 |
| lognormálne | $\hat{\sigma}$=1,1802 ; $\hat{\mu}$=8,5701 |
| európske Paretovo | $\hat{\alpha}$=0,548 ; $\hat{\beta}$=850 |
| americké Paretovo | $\hat{\alpha}$=2,6367 ; $\hat{\beta}$=18152 |
| Weibullovo | $\hat{k}$=0,96238 ; $\hat{\lambda}$=9042,3 |

Tabuľka 7.2: Odhady parametrov

- Smirnovov test, keďže tento test má väčšiu silu ako Pearsonov $\chi^2$- test dobrej zhody a navyše rozsah nášho výberu nie je natoľko veľký, aby testovacia štatistika pri Pearsonovom $\chi^2$- teste dobrej zhody mala $\chi^2$ - rozdelenie.

Výsledky pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ sú zhrnuté v tabuľke 7.3.

| Rozdelenie | Hodnota testovacej štatistiky | Kritická hodnota |
|---|---|---|
| log-gama | 0,13676 | 0,16088 |
| lognormálne | 0,13856 | 0,16088 |
| európske Paretovo | 0,17019 | 0,16088 |
| americké Paretovo | 0,11367 | 0,16088 |
| Weibullovo | 0,12514 | 0,16088 |

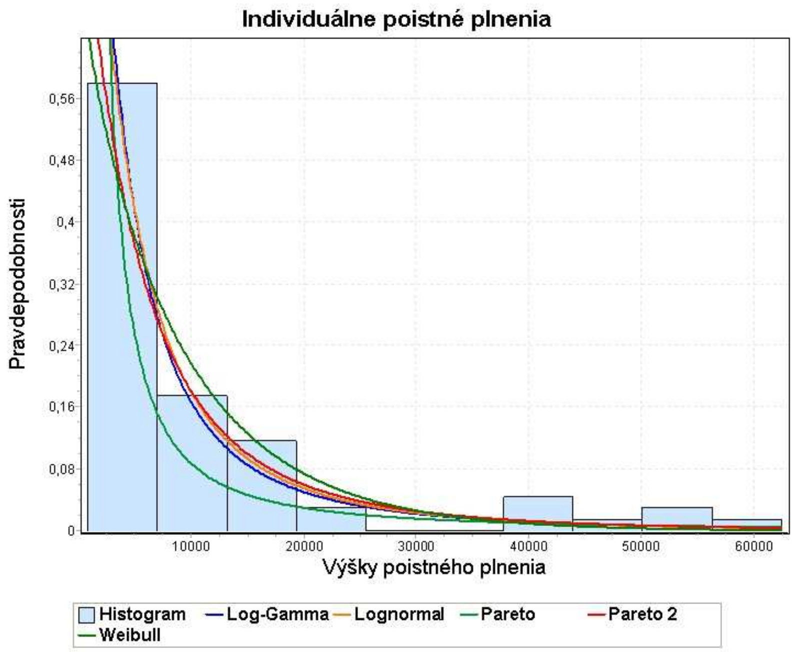
Tabuľka 7.3: Kolmogorovov - Smirnovov test

Ako je v teoretickej časti uvedené, pri tomto teste je oblasťou zamietnutia nulovej hypotézy, že dáta pochádzajú z testovaného rozdelenia oblasť, kde hodnota testovacej štatistiky prevyšuje kritickú hodnotu.

Na základe výsledkov uvedených v tabuľke 7.3 vidíme, že okrem európskeho Paretovho rozdelenia žiadne iné rozdelenie túto podmienku nespĺňa, teda pri týchto rozdeleniach nulovú hypotézu nezamietame. Najväčší rozdiel medzi hodnotou testovacej štatistiky a kritickou hodnotou testu je v prípade amerického Paretovho rozdelenia.

## 7.4 Interpretácia výsledkov

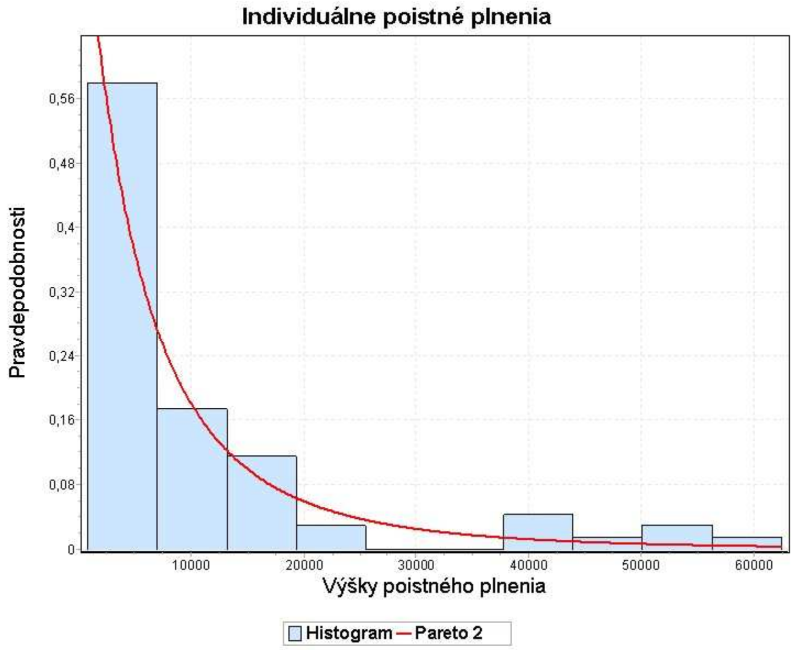
Na základe výsledkov môžeme skonštatovať, že spomedzi testovaných rozdelení s ťažkými chvostami americké Paretovo rozdelenie je najvhodnejšie na modelovanie našich dát, aj keď aj ďalšie rozdelenie tieto poistné plnenie popisujú celkom dobre. Na záver ešte pripájame dva obrázky - histogram dát spolu s krivkami hustôt všetkých testovaných rozdelení (obrázok 7.2) a histogram dát spolu s krivkou najvhodnejšieho, teda amerického Paretovho rozdelenia (obrázok 7.3).




Obr. 7.2: Histogram s krivkami hustôt rozdelení s ťažkými chvostami

Ďalšiu analýzu konkrétnych dát je možné nájsť v [11], kde je použitý systém postupného testovania rozdelení, teda neuvažujeme celú triedu rozdelení, ale len jedno konkrétne a v prípade, že sa neukáže ako dostatočne vhodné, zvolíme ďalšie a postup opakujeme.

V rámci tejto práce sme sa nevenovali len produktu poistenia domácností, ale analyzovali sme všetky poistné plnenia, ktoré sme mali k dispozícii. Presnejšie to znamenalo v oblasti cestovného poistenia viac ako 63 000 poistných plnení rozdelených do 28 skupín podľa rizika a takmer 12 000 poistných plnení v oblasti poistenia majetku rozdelených do 26 skupín podľa produktu, resp. do 23 skupín podľa




Obr. 7.3: Histogram s krivkou hustoty amerického Paretovho rozdelenia

rizika.

Keďže postup hľadania najvhodnejšieho modelu bol podobný ako v prípade poistenia domácností, už ho bližšie popisovať nebudeme a keďže rozsah jednotlivých výšok poistných plnení je veľmi veľký, nebudeme ich pre ďalšie produkty a riziká uvádzať.

Pri tejto komplexnej analýze produktov a rizík cestovného poistenia a poistenia majetku sa ako vhodné typy rozdelenia ukázali rozdelenia s ťažkými chvostami v nasledovných prípadoch:

### Poistenie majetku

- poistenie zariadení a zásob,
- poistenie elektroniky (rôzne typy),
- poistenie motorových vozidiel pre občanov,
- poistenie motorových vozidiel krátkodobo v zahraničí,
- poistenie strojov,
- stavebno - montážne poistenie,

- poistenie rodinných domov a bytov (rôzne typy),
- poistenie bytových domov,
- poistenie domácností (rôzne typy).

**Cestovné poistenie**

- poistenie trvalých následkov úrazu,
- poistenie liečebných nákladov na Slovensku,
- poistenie nedodania batožiny leteckou spoločnosťou,
- poistenie storna zájazdu,
- poistenie zodpovednosti za škodu,
- poistenie storna objednanej služby,
- poistenie batožiny.

Môžeme teda vidieť, že trieda rozdelení s ťažkými chvostami sa v poistnej sfére veľmi často a v rôznych konkrétnych situáciách dá použiť na modelovanie dát. V priebehu analýzy výsledky ukázali, že v uvedených prípadoch bola táto trieda rozdelení oveľa presnejšia ako napríklad trieda rozdelení s ľahkými chvostami.

# Záver

V tejto práci sme sa venovali výskytu poistných plnení z pohľadu počtu poistných plnení a hlavne z pohľadu výšky poistných plnení. Uviedli sme definície i základné vlastnosti rozdelení, ktoré sa v súčasnosti najčastejšie používajú v oboch prípadoch a ďalej sme sa bližšie zamerali na rozdelenia s ťažkými chvostami, ktoré sa ukazujú ako najvhodnejšie pre rozdelenia výšky poistných plnení, keďže v ich podstate je zahrnutá aj pravdepodobnosť extrémne vysokých hodnôt.

Samostatná časť bola venovaná úvodu do teórie ruinovania, kde sme zosumarizovali základné pojmy a následne sa venovali aplikácii pre konkrétny náhodný proces, a to zložený Poissonov proces. Keďže aj v tomto prípade rozhodujúcu úlohu zohráva rozdelenie výšky poistných plnení, uviedli sme všeobecný postup, ako je možné aproximovať pravdepodobnosť zruinovania. Opísali sme tiež metódu Laplaceovej transformácie, ktorá je často vhodná na riešenie integrálno - diferenciálneho problému, ktorý pri aproximácii vzniká. Tento postup bol aplikovaný pre Paretovo rozdelenie a boli uvedené výsledky pre konkrétne hodnoty parametrov.

Šiesta kapitola poskytuje všeobecný postup modelovania pravdepodobnostnými rozdeleniami s uvedením základných metód odhadovania parametrov a dvoch testov používaných pri overovaní zhody teoretického rozdelenia s empirickým.

Posledná kapitola využíva obsah všetkých predchádzajúcich a obsahuje aplikáciu na konkrétne poistné plnenia. Detailne je uvedený prípad poistenia domácností, v ktorom sa ako najvhodnejšie ukázalo americké Paretovo rozdelenie, avšak dobré boli takisto ďalšie z rozdelení s ťažkými chvostami. Okrem toho sme stručne zhrnuli výsledky pri testovaní iných produktov a rizík cestovného poistenia a poistenia majetku, kde sa táto trieda rozdelení ukázala ako najvhodnejšia v rozličných prípadoch. Pri analýze sme sa opierali o teoretické poznatky a využili sme tiež možnosti dostupného softvéru, konkrétne štatistického programu R a modelovacieho programu EasyFitXL.

Môžeme teda skonštatovať, že cieľ práce bol splnený, čitateľ by na základe tejto práce mal zvládnuť modelovanie poistných plnení a vhodne použiť triedu rozdelení s ťažkými chvostami. Tá ma samozrejme využitie nielen v oblasti neživotného poistenia, ale aj v iných sférach, napríklad pri dôchodkových a penzijných fondoch. Zároveň bolo snahou autora poskytnúť aj alternatívne zdroje, kde je možné nájsť ďalšie informácie a tie sú vždy uvedené priamo v texte.

# Literatúra


[1] BÜHLMANN, H.: Mathematical Methods in Risk Theory. Springer-Verlag, New York, 1970. s. 131 - 152.

[2] DICKSON, D.C.M., WATERS, H. R.: Ruin theory. The Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, London and Edinburgh, 1992. 63 s.

[3] DICKSON, D.C.M., EGÍDIO DOS REIS, A.D.,WATERS, H. R.: Some Stable Algorithms in Ruin Theory and Their Applications. Astin Bulletin 25, 1995. s. 153 - 175.

[4] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C., MIKOSCH, T.: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer-Verlag, New York, 2003. s. 21 - 57.

[5] HORÁKOVÁ, G.: Analýza rizikovosti poistných zmlúv neživotného poistenia. *www.ekf.vsb.cz/shared/uploadedfiles/cul33/Horakova.Galina.pdf*

[6] KATINA, S.: Vybrané kapitoly z počítačovej štatistiky I. Univerzita Komenského, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Bratislava, 2000. 82 s.

[7] KHAMNEI, H.J., BEVRANI, H., HAYDARI, A. A.: Parameter Estimation for the Heavy Tailed Distributions with the Empirical Distribution. *www.scialert.net/qredirect.php?doi = jas.2008.1118.1121&linkid = pdf*

[8] LAMOŠ, F.,POTOCKÝ, R.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998. 344 s. ISBN 80-223-1262-2.

[9] LIMA, F.D.P., GARCIA, J.M.A., EGÍDIO DOS REIS, A.D. : Fourier/Laplace transforms and ruin probabilities. Astin Bulletin 32, 2002. s. 91 - 104.

[10] MATHWAVE TECHNOLOGIES: EasyFit:Product Specification. $www.mathwave.com/products/easyfit_desc.html$

[11] MICHALIKOVÁ, J.: Aproximácia výšky poistných plnení v neživotnom poistení. Forum Statisticum Slovacum. 7/2008.

[12] PACÁKOVÁ, V.: Aplikovaná poistná štatistika. Bratislava: Vydavateľstvo ELITA, 2000. 260 s. ISBN 80-8044-073-5.

[13] POTOCKÝ, R.: Stochastické metódy v poisťovníctve. Slovenská štatistika a demografia. 4/2007. s. 59 - 67.

[14] POTOCKÝ, R.,STEHLÍK, M.: Stochastic Models in Insurance, Risk and Pension Funds. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics. 1/2005. s. 77 - 86.

[15] POTOCKÝ, R.,STEHLÍK, M.: Stochastic Models in Insurance and Finance with Respect to Basel II. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics. 3/2007. s. 237 - 245.

[16] RAMSAY, C.M., USÁBEL, M.A.: Calculating ruin probabilities via product integration, Astin Bulletin 27, 1997. s. 263 - 271.

[17] STEHLÍK, M., POTOCKÝ, R.,WALDL, H.,FABIÁN, Z.: IFAS Research Paper Series 2008-32. Johannes Kepler University, Department for Applied Statistics, Linz, 2008. 30 s.

[18] WAGNER, H.: Bayesian analysis of mixtures of exponentials. Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics. 5/2008.

[19] WIKIPEDIA: Heavy - tailed distribution. $en.wikipedia.org/wiki/Heavy-tailed\_distribution$

[20] Zákon o poisťovníctve. Zbierka zákonov č. 8/2008. s. 79 - 80.