Univerzita Komenského
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Bratislava

Martin Takáč

Využitie aproximácie rozdelenia časovo spriemernenej hodnoty náhodnej premennej pri oceňovaní ázijských opcií

Študentská vedecká konferencia 2009

Vedúci práce: doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Prehlasujem, že túto prácu som vypracoval sám, iba s použitím uvedenej literatúry a s pomocou môjho vedúceho.

....
Martin Takáč

Aj touto cestou by som sa chcel poďakovať vedúcemu práce Danielovi Ševčovičovi za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri vypracovávaní tejto práce.

Abstrakt

V práci odvádzame aproximatívny vzorec na oceňovanie ázijských opcií bez možnosti predčasného uplatnenia. Pomocou momentovej vety odhadneme parametre log-normálneho rozdelenia, ktorým aproximujeme nekonečný súčet navzájom korelovaných log-normálnych rozdelení. Ukazuje sa, že táto aproximácia je vhodná len pre malé časy T do expirácie a pri malej volatilite podkladového aktíva σ. Na rozdiel od klasického spriemerovania odvádzame momenty pre vážený aritmetický priemer. Nakoniec uvádzame možné vylepšenia použitím posunutého log-normálneho rozdelenia, či tzv. generalized extreme value rozdelenia.

Obsah

Glosár

Arbitráž: vykonanie niekoľkých obchodov na trhu za účelom obdržania garantovaného bezrizikového zisku.

Derivát: cenný papier, ktorého hodnota je závislá (odvodená) od už existujúcich cenných papierov na trhu.

Kontrakt: zákonne platná dohoda medzi dvoma stranami.

Payoff: výplata derivátu definovaná ako nominálna hodnota mínus strike price.

Strike price: pevne dohodnutá cena, za ktorú môže byť cenný papier predaný alebo kúpený vo vopred stanovenom čase.

Zoznam symbolov

σ - volatilita.

τ - čas, ktorý ostáva do maturity.

S - cena podkladového aktíva.

r - bezriziková úroková miera.

E - expiračná cena (strike price).

A_t - aritmetický priemer cien akcií, $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_t$.

Kapitola 1

Úvod a motivácia

1.1 Motivácia

V posledných rokoch rastie objem obchodovaných exotických opcií. Nemalú časť tvoria práve Ázijské opcie. Keďže neexistuje explicitný vzorec na ich ocenenie (v prípade aritmetického spriemerovania), vzniklo mnoho metód ako vypočítať cenu opcie. Niektoré algoritmy založené na binárnych stromoch potrebujú stovky až tisíce sekúnd na výpočet ceny opcie (viď. napr. [1]). Preto naším cieľom bude nájsť aproximatívny explicitný vzorec na ocenenie Ázijskej opcie. Na rozdiel od štandardného aritmetického spriemerovania budeme uvažovať aj vážené aritmetické spriemerovanie so všeobecnou váhovacou funkciou $a(\xi)$.

1.2 Opčné deriváty

Finančné deriváty sú odvodené od aktív (akcie, komodity,...), burzových indexov, menových kurzov, ... Spoločným názvom v angličtine **underlaying**. Základnými typmi finančných derivátov sú opčné deriváty, forwardy, futurity a swapy. V práci sa budeme zaoberať iba opčnými derivátmi (opciami).

Opcia je právo (nie povinnosť) kúpiť alebo predať určité podkladové aktívum alebo finančný nástroj v stanovenom termíne (expiration date) za vopred dohodnutú cenu (strike price). Ak sa opcia môže realizovať pred časom vypršania, tak hovoríme o Americkej opcie. Ak sa môže realizovať iba v čase vypršania, hovoríme o Európskej opcie.

Kúpna opcia (call option) je kontrakt, ktorý dáva vlastníkovi právo kúpiť dané podkladové aktívum v časte vypršania za dohodnutú cenu.

Predajná opcia (put option) je kontrakt, ktorý dáva vlastníkovi právo predať dané podkladové aktívum v čase vypršania za dohodnutú cenu.

Exotické opcie sú všetky opcie, ktoré nie sú definované ako štandardné (plain-vanilla-option).

Obchodník môže na opčnom trhu zaujať nasledovné pozície:

- kúpa kúpnej opcie (long call),
- predaj kúpnej opcie (short call),
- kúpa predajnej opcie (long put),
- predaj predajnej opcie (short put).

Predpokladajme, že sme vypisovateľom Európskej call opcie. Nech opčná cena je X, cena podkladového aktíva je S, bezriziková úroková miera je r a opčný obchod sa uzatvára na čas T. Dilemou je, za akú cenu V máme danú opciu predať. Táto cena sa volá opčná prémia (option premium, option value).

Riešenie je možné nájsť postupom opísaným v [7], [4], [12]. O podkladovom aktíve sa predpokladá, že sleduje nasledovný stochastický proces:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t),$$

kde W_t je Wienerov proces.

Za nasledovných predpokladov

- vylúčenie arbitráže (no riskless arbitrage opportunities),
- obchodovať sa dá nepretržite,
- bezriziková úroková miera je konštantná a každému známa,
- nie sú žiadne transakčné náklady a neplatia sa žiadne dane,
- aktíva neplatia žiadne dividendy,
- aktíva sú perfektne deliteľné,
- možnosť požičasť, resp. požičať si ľubovoľne veľa peňazí za bezrizikovú úrokovú mieru.

a skonštrulovaním bezrizikového portfólia pozostávajúceho z opcií, akcií a dlhopisov dostávame nasledovnú Black-Scholesovú parciálnu diferenciálnu rovnicu.

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{1.1}$$

Počiatočnú podmienku určíme nasledovne: v čase expirácie platí ($\tau = 0$), že

$$V(S, 0) = \max\{S - X, 0\}. \tag{1.2}$$

Podľa [4] je riešením (1.1) a (1.2):

$$V(S, \tau) = SN(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2), \tag{1.3}$$

kde

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$$

je distribučná funkcia normálneho rozdelenia s $\mu = 0$ a $\sigma = 1$,

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{1.4}$$

a

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln \frac{S}{X} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}. \tag{1.5}$$

1.2.1 Typy opcií

Opcie môžeme rozdeliť podľa viacerých kritérií. Jedným kritériom môže byť napr. na aké podkladové aktívum sú naviazané. Tu môžeme zaradiť napr.:

- opcie na akcie,
- opcie na opcie,
- opcie na na výmenné kurzy,
- opcie na úrokové miery.

Iným kritériom môže byť možnosť predčasného uplatnenia opcie. Rozoznávame teda opcie:

- s možnosťou predčasného uplatnenia (tzv. americké opcie). Sú to opcie, ktoré môžeme uplatiť ešte pred stanovenou dobou maturity T,
- bez možnosti predčasného uplatenia (tzv. európske opcie). Opcia vyprší v čase expirácie T.

Ďalším nemenej významným kritériom je, či cena pay-off záleží od vývoja akcie do času expirácie (jedná sa o tzv. exotické opcie). Sem patria napr.:

- ruské opcie (cena opcie je funkciou maximálnej, resp. minimálnej ceny podkladového aktíva),
- bariérové opcie,
- lookback opcie,
- ázijské opcie.

1.3 Ázijské opcie

Ázijské opcie sú typom opcií, ktoré závisia aj od historického vývoja ceny podkladového aktíva. V ďalšom sa zameriame výlučne na opcie, kde podkladovým aktívom sú akcie.

V prípade ázijských opcií je pay-off funkciou aj historického priemeru cien akcií.

Použitie Ázijské opcie sú užitočným finančným nástrojom na zaisťovanie špecifických typov aktív, akými môžu byť napr. ropa, obilie, ... Veľkou výhodou týchto opcií je aj to, že výsledný pay-off nie je veľmi citlivý od aktuálnej ceny akcie.

Podľa typu spriemerovania rozlišujeme opcie

- s **aritmetickým spriemerovaním** $A_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t S_\xi \, d\xi$,
- s **geometrickým spriemerovaním** $\ln A_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \ln S_\xi \, d\xi$.

Podľa pozície A_t v pay-off poznáme dva typy:

- Average rate call ($V(S,A,T) = \max\{0, A-E\}$), resp. put ($V(S,A,T) = \max\{0, E-A\}$).

- Average strike call ($V(S, A, T) = \max\{0, S - A\}$), resp. put ($V(S, A, T) = \max\{0, A - S\}$).

Poznamenajme, že v prípade geometrického spriemerovania existujú explicitné vzorce na oceňovanie ázijských opcií (podrobnejšie o geometrickom spriemerovaní možno nájsť v [4]).

Kapitola 2

Oceňovanie average rate opcií bez možnosti predčasného uplatnenia

V súčasnej dobe nie je známy explicitný vzorec na ocenenie Ázijskej opcie [4]. Riešenie sa preto musí hladať rôznymi aproximatívnymi metódami. Medzi základné metódy ocenenia Ázijskej opcie patrí:

- **numerický prístup** - spočíva v Monte Carlo simulácií, riešenie PDR metódou konečných diferencií,
- **analytická aproximácia** - spočíva v aproximácii rozdelenia A_T a odvodení aproximatívneho explicitného vzorca na výpočet ceny opcie,
- **odhad dolného a horného ohraničenia ceny opcie**.

Viac o tejto problematike viď. v [14].

V tejto kapitole odvodíme prvé dva momenty náhodnej premennej A_T v prípade ako jednoduchého aritmetického spriemerovania, tak aj v prípade váženého spriemerovania. Pomocou mometovej vety odhadneme parametre log-normálneho rozdelenia a nakoniec odvodíme aproximatívny explicitný vzorec na oceňovanie ázijskej average rate opcie.

2.1 Idea odvodenia

Je známe (viď. [7], [1]), že cena call opcie sa dá vypočítať ako

$$V(S, A, 0) = e^{-rT}\mathbb{E}_Q[(A_T - E)^+], \tag{2.1}$$

kde $(\xi)^+ = \max\{0, \xi\}$ a Q je technická, rizikovo neutrálna pravdepodobnosť (jej existencia je zaručená Girsanovova lemov) a $A_T = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T S_\xi \, d\xi$.

Lema 2.1.1 (Girsanovova)**.** *Nech $W_t(\omega)$, $0 \le t \le T$, je Brownov pohyb na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Nech $\gamma_t(\omega)$ je $\mathcal{F}_t^W$-adaptovaný proces, pre ktorý*

$$E_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right)\right] < \infty.$$

Potom existuje miera Q na $(\Omega, \mathcal{F})$ taká, že

- $Q \sim P$ *(miera Q a P sú navzájom ekvivalentné),*
- $\dfrac{dQ}{dP}(\omega) = \exp\left(-\displaystyle\int_0^T \gamma_t(\omega) dW_t(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2(\omega) dt\right)$,
- $\tilde{W}_t(\omega) = W_t(\omega) + \int_0^t \gamma_s(\omega) ds$ *je Brownov pohyb na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.*

Pre dS pri pravdepodobnostnej miere P platí

$$dS_t = S_t \sigma dW_t + S_t \mu dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt.$$

Dá sa ukázať, že pre rizikovo neutrálnu mieru Q musí platiť (viď. [7]), že proces $Z_t = e^{-rt}S_t$ musí byť $\mathcal{F}_t^W$-martingal. A teda tento proces musí mať nulový drift. Potom dostávame, že pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti Q pre proces S_t platí:

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma \tilde{W}_t + rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right), \tag{2.2}$$

kde $\tilde{W}_t$ je Wienerov proces na $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

Z Itóovej lemy potom pre dS_t platí

$$dS_t = Srdt + S\sigma d\tilde{W}_t. \tag{2.3}$$

V ďalšom budeme namiesto $\tilde{W}_t$ písať iba W_t, lebo v ďalšom budeme uvažovať už len mieru Q.

2.1.1 Binárne stromy

Pre vývoj ceny akcie predpokladáme, že sleduje geometrický Brownov pohyb, teda

$$S(t+dt) = S(t) \cdot \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t\right], \qquad (2.4)$$

kde W_t je Wienerov proces, r rizikovo neutrálna miera a σ je volatilita. Binárny vývoj akcie predpokladá, že cena akcie sa môže zvýšiť z S na $S \cdot u$, kde $u > 1$ s pravdepodobnosťou p, alebo znížiť na $S \cdot d$ ($d < 0$) s pravdepodobnosťou $1 - p$.

Ukážka vývoja v dvoj-etapovom binárnom strome je na obr. 2.1.

Obrázok 2.1: Ukážka dvoj-etapového binárneho stromu.

Ak by sme mali n-etapový binárny strom, tak potom jedna etapa predstavuje čas $\Delta t = \frac{T}{n}$. Potom pre (viď. [1])

$$\begin{aligned} p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, && (2.5)\\ u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, && (2.6)\\ d &= \frac{1}{u}, && (2.7) \end{aligned}$$

bude binárny strom správne popisovať vývoj akcie (pri rizikovo neutrálnej miere Q).

Naším hlavným cieľom je vypočítať hodnotu $V(S, A, 0)$. Aby sme to mohli urobiť, potrebovali by sme vedieť rozdelenie A a potom pomocou vzorca (2.1) už ľahko ocenili danú opciu.

Je zrejmé, že S_t má lognormálne rozdelenie. Taktiež je známe, že súčet lognormálnych náhodných veličín nie je lognormálny, ale dá sa za istých predpokladov ($\sigma < 0.4$) dobre aproximovať lognormálnym rozdelením.

2.2 Výpočet momentov pre obyčajné spriemerovanie

Na odhadnutie parametrov lognormálneho rozdelenia môžeme použiť napr. momentovú metódu. Keďže lognormálne rozdelenie je dvoj-parametrické rozdelenie, tak potrebujeme určiť presne dva momenty veličiny A_T. Daný problém **v prípade obyčajného spriemerovania** bol už riešený (viď. napr. [10],[11],[8]), no v práci odvádzame momenty iným spôsobom. Najprv spojitý proces zdiskretizujeme na n častí a následne vypočítame limity pre $n \to \infty$. Daný postup je jednoduchší v prípade odvádzania vyšších momentov. V ďalšej časti odvodíme momenty v prípade váženého spriemerovania.

Lema 2.2.1. *Pre $E[A_T]$ platí*

$$E[A_T] = S_0 \frac{\exp(rT) - 1}{rT}. \tag{2.8}$$

Dôkaz: *Najprv budeme aproximovať spojitý proces S_t diskrétnym procesom a nakoniec limitným prechodom dostaneme tvrdenie uvedenej lemy. Nech ξ_j sú alternatívne rozdelené, nezávislé náhodné premenné, ktoré nadobúdajú hodnoty u s pravdepodobnosťou p a d s pravdepodobnosťou $1 - p$. Definujme $\xi_0 = 1$. Potom $S_{k\Delta t} = S_0 \prod_{j=0}^{k} \xi_j$. Označme*

$$\mu = E[\xi] = p(u - d) + d = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}(u - d) + d = e^{r\Delta t}.$$

Potom

$$E[A_T] = \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_{i\cdot\Delta t}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} E\left[S_{i\cdot\Delta t}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_0 E\left[\prod_{j=0}^{i} \xi_j\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_0 \prod_{j=0}^{i} E[\xi_j] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} S_0 \prod_{j=1}^{i} \mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} S_0 \mu^i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} S_0 \mu^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} S_0 \frac{1-\mu^{n+1}}{1-\mu} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} S_0 \frac{-1+e^{r\frac{T}{n}(n+1)}}{-1+e^{r\frac{T}{n}}} = S_0 \lim_{n\to\infty} \left(-1+e^{r\frac{T}{n}(n+1)}\right) \frac{\frac{1}{n+1}}{-1+e^{r\frac{T}{n}}} =$$

$$= S_0 \left(-1+e^{rT}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{(n+1)^2}}{-e^{r\frac{T}{n}} rT \frac{1}{n^2}} = S_0 \frac{-1+e^{rT}}{rT}.$$

Lema 2.2.2. *Pre $E[A_T^2]$ platí*

$$E[A_T^2] = S_0^2 \frac{2}{\alpha} \left[\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{\exp(\beta)-1}{\beta} \right], \tag{2.9}$$

kde $\alpha = rT$, $\beta = 2(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T$.

Dôkaz: *Označme $\nu = E[\xi^2] = \mu(u+d)-1$, $\eta = \mu^{-1}$, $\zeta = \nu\eta$. Potom*

$$(n+1)^2 S_0^{-2} E[A_n^2] = E\left[\sum_{i=0}^{n} S_0^{-1} S_{i\cdot\Delta t}\right]^2 = E\left[\sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0}^{i} \xi_j\right]^2 =$$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{i} \xi_j \prod_{l=0}^{k} \xi_l\right] = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} E\left[\prod_{j=0}^{i} \xi_j \prod_{l=0}^{k} \xi_l\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \nu^i \left(2 \sum_{j=i+1}^{n} \mu^{j-i} + 1\right) = \sum_{i=0}^{n} \nu^i \left(2 \sum_{j=1}^{n-i} \mu^j + 1\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \nu^i \left(2\mu \frac{1-\mu^{n-i}}{1-\mu} + 1\right) = \sum_{i=0}^{n} \nu^i \left(\frac{2\mu}{1-\mu} + 1 - 2\mu^{n+1} \frac{\eta^i}{1-\mu}\right) =$$

$$= \frac{1-\nu^{n+1}}{1-\nu} \left(\frac{2\mu}{1-\mu} + 1\right) - 2 \frac{\mu^{n+1}}{1-\mu} \frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}.$$

Je zrejmé, že

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\frac{1-\nu^{n+1}}{1-\nu} &= \frac{-1+\exp(\beta)}{\beta},\\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{2\mu}{1-\mu}+1\right) &= -\frac{2}{\alpha},\\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\frac{2\mu^{n+1}}{1-\mu} &= -\frac{2\exp(\alpha)}{\alpha},\\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta} &= \frac{-1+\exp((r+\sigma^2)T)}{(r+\sigma^2)T}.
\end{aligned}
$$

Potom

$$
S_0^{-2}E[A_T^2] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left\{\frac{1-\nu^{n+1}}{1-\nu}\left(\frac{2\mu}{1-\mu}+1\right) - \frac{2\mu^{n+1}}{1-\mu}\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\right\} =
$$

$$
= \frac{2}{\alpha}\left[\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{\exp(\beta)-1}{\beta}\right].
$$

Lema 2.2.3. *Pre $E[S_T A_T]$ platí*

$$
E[S_T A_T] = S_0^2\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha}, \tag{2.10}
$$

kde $\alpha = rT$, $\beta = 2(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T$.

Dôkaz: *Podobne ako v predchádzajúcich dôkazoch, spojitý proces najprv zdiskretizujeme a nakoniec prejdeme limitou k pôvodnému spojitému problému.*

$$
E[S_T A_T] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}E\left[S_T\sum_{i=0}^{n} S_0 S_{i\cdot\Delta t}\right] =
$$

$$
= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}E\left[S_0\left(\prod_{j=0}^{n}\xi_j\right)\sum_{i=0}^{n}\left(S_0\prod_{k=0}^{i}\xi_k\right)\right] =
$$

$$
= \lim_{n\to\infty}\frac{S_0^2}{n+1}E\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=0}^{n}\xi_j\prod_{k=0}^{i}\xi_k\right)\right] =
$$

$$
= \lim_{n\to\infty}\frac{S_0^2}{n+1}E\left[\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\xi_j\prod_{k=1}^{i}\xi_k\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{S_0^2}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}\mu^{n-i}\nu^i\right) =
$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2}{n+1}\mu^n \left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2}{n+1}\mu^n \frac{1-\nu^{n+1}\mu^{-n-1}}{1-\nu\mu^{-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2}{n+1}\frac{\mu^{n+1}-\nu^{n+1}}{\mu-\nu} = S_0^2 e^{rT}\frac{e^{(r+s^2)T}-1}{(r+s^2)T} = S_0^2\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

2.3 Zovšeobecnené spriemerovanie

V predchádzajúcej časti sme sa venovali prípadu, kedy $A_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t S_\xi \, d\xi$. V tejto časti sa budeme zaoberať prípadom, kde budeme uvažovať vážený aritmetický priemer s váhovacou funkciou $a(\xi)$. V praxi sa totižto obchodujú opcie, ktoré sa spriemerovávajú napr. posledných k dní pred expiráciou.

Všeobecný vážený priemer môžeme teda zapísať ako

$$A_T = \frac{1}{\int_0^T a(\xi)d\xi}\int_0^T a(T-\xi)S_\xi \, d\xi.$$

Príklady váhovacích funkcií sú napríklad:

- exponenciálne váhovnaie $a(\xi) = \exp(-\lambda\xi)$,
- spriemerovávanie pred expiráciou $a(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{pre } \xi \geq \varepsilon \\ 1, & \text{pre } \xi < \varepsilon \end{cases}$.

2.3.1 Odhad momentov pre váhovaciu funkciu $\exp(-\lambda\xi)$

V tejto časti odhadneme momenty A_T, kde

$$A_T = \frac{1}{\int_0^T \exp(-\lambda\xi)d\xi}\int_0^T e^{-\lambda(T-\xi)}S_\xi \, d\xi$$

je vážený aritmetický priemer s váhovacou funkciou $a(\xi) = \exp(-\lambda\xi)$.

Lema 2.3.1. *Pre $E[S_T A_T]$ platí*

$$E[S_T A_T] = \frac{S_0^2}{\int_0^T e^{-\lambda\xi}d\xi}\frac{e^{2(r+\frac{1}{2}s^2)T}-e^{(r+\lambda)T}}{(\lambda+r+s^2)T}.$$

Dôkaz: *Označme si $\omega = \exp(\lambda \cdot \Delta t)$, $\varrho = \omega\nu$. Potom*

$$E[S_T A_T] \cdot \int_0^T e^{-\lambda\xi} d\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} E\left[S_T \sum_{i=0}^{n} S_0 e^{-\lambda T + \lambda \cdot i \cdot \Delta t} S_{i\cdot\Delta t}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\lambda T}}{n+1} E\left[S_T \sum_{i=0}^{n} S_0 \omega^i S_{i\cdot\Delta t}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\lambda T}}{n+1} E\left[S_0 \left(\prod_{j=0}^{n} \xi_j\right) \sum_{i=0}^{n} \omega^i \left(S_0 \prod_{k=0}^{i} \xi_k\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2 e^{-\lambda T}}{n+1} E\left[\sum_{i=0}^{n} \omega^i \left(\prod_{j=0}^{n} \xi_j \prod_{k=0}^{i} \xi_k\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2 e^{-\lambda T}}{n+1} E\left[\sum_{i=0}^{n} \omega^i \left(\prod_{j=1}^{n} \xi_j \prod_{k=1}^{i} \xi_k\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2 e^{-\lambda T}}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{n} \omega^i \mu^{n-i} \nu^i\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2 e^{-\lambda T}}{n+1} \mu^n \left(\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\varrho}{\mu}\right)^i\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2 e^{-\lambda T}}{n+1} \mu^n \frac{1 - \varrho^{n+1}\mu^{-n-1}}{1 - \varrho\mu^{-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_0^2 e^{-\lambda T}}{n+1} \frac{\mu^{n+1} - \varrho^{n+1}}{\mu - \varrho} = S_0^2 e^{rT} e^{-\lambda T} \frac{e^{(\lambda + r + s^2)T} - 1}{(\lambda + r + s^2)T} =$$

$$= S_0^2 \frac{e^{2(r + \frac{1}{2}s^2)T} - e^{(r+\lambda)T}}{(\lambda + r + s^2)T}.$$

Poznámka: Ak vypočítame $\lim\limits_{\lambda\to 0} E[S_T A_T]$, tak dostávame (2.10).

Lema 2.3.2 (Itóova izometria [12], [9]). *Nech pre merateľnú funkciu $f : (0,t) \to \mathbb{R}$ platí $\int_0^t f^2(\xi) d\xi < \infty$. Nech W_t je Wienerov proces. Potom existuje Itóov integrál $\int_0^t f(\xi) d\xi$, ktorý predstavuje normálne rozdelenú náhodnú premennú s rozdelením $N(0, \sigma^2(t))$, kde $\sigma^2(t) = \int_0^t f(\xi)^2 d\xi$. Potom platí:*

$$E\left[\left(\int_0^t f(\xi) dW_\xi\right)^2\right] = \int_0^t f(\xi)^2 d\xi. \tag{2.11}$$

Nech $\{S_\xi, \xi \geq 0\}$ je stochastický proces. Potom platí

$$E\left[\left(\int_0^t S_\xi dW_\xi\right)^2\right] = \int_0^t E\left[S_\xi^2\right] d\xi. \tag{2.12}$$

Lema 2.3.3. *Pre* $E[S_t]$ *platí*

$$E[S_t] = S_0 e^{rt}.$$

Dôkaz:

$$E[S_T] = \lim_{n\to\infty} S_0 E\left[\prod_{i=0}^{n} \xi_i\right] = \lim_{n\to\infty} S_0 \prod_{i=0}^{n} E[\xi_i] = \lim_{n\to\infty} S_0 \mu^n = S_0 e^{rT}.$$

Lema 2.3.4 (Prvý moment v prípade váženého spriemerovania pre ľubovoľnú váhovaciu funkciu)**.** *Pre* $E[A_T]$ *platí*

$$E[A_T] = \frac{S_0}{\int_0^T a(\xi)d\xi} \int_0^T a(T-\xi)e^{r\xi}d\xi.$$

Dôkaz:

$$E[A_T]\cdot \int_0^T a(\xi)d\xi = E\left[\int_0^T a(T-\xi)S_\xi d\xi\right] = \int_0^T a(T-\xi)E[S_\xi]d\xi =$$

$$= \int_0^T a(T-\xi)S_0 e^{r\xi}d\xi.$$

Poznámka 1: $\displaystyle\int_0^T a(T-\xi)e^{r\xi}d\xi$ je konvolúcia jadra $a(\bullet)$ a $\exp(r\bullet)$.
Poznámka 2: Ak uvažujeme $a(\xi) = \exp(-\lambda\xi)$, tak

$$E[A_T] = \frac{S_0}{\int_0^T e^{-\lambda\xi}d\xi} \int_0^T e^{-\lambda(T-\xi)}e^{r\xi}d\xi = S_0 \frac{\lambda}{\lambda+r} e^{-\lambda T} \frac{e^{(\lambda+r)T}-1}{1-e^{-\lambda T}} =$$

$$= S_0 \frac{\lambda}{\lambda+r} \frac{e^{rT}-e^{-\lambda T}}{1-e^{-\lambda T}}.$$

Lema 2.3.5 (Druhý moment v prípade všeobecného spriemerovania)**.** *Pre* $E[A_T^2]$ *platí*

$$E[A_T^2] = E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)dS\right)^2\right] - 2E\left[\int_0^T a(T-\xi)dS \int_0^T a(T-\xi)S\sigma dW_\xi\right]$$

$$+E\left[\int_0^T (a(T-\xi)S\sigma)^2 d\xi\right].$$

Dôkaz:
$$r^2E[A_T^2] = r^2E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)S_\xi d\xi\right)^2\right].$$
Z rovnice (2.3) dostávame, že
$$Sd\xi = \frac{dS - S\sigma dW_\xi}{r}. \tag{2.13}$$
Potom
$$r^2E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)S_\xi d\xi\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)(dS - S\sigma dW_\xi)\right)^2\right] =$$
$$= E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)dS - \int_0^T a(T-\xi)S\sigma dW_\xi)\right)^2\right] = E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)dS\right)^2\right]$$
$$-2E\left[\int_0^T a(T-\xi)dS\int_0^T a(T-\xi)S\sigma dW_\xi\right] + E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)S\sigma dW_\xi\right)^2\right].$$
Použitím Itóovej izometrie dostávame
$$= E\left[\left(\int_0^T a(T-\xi)dS\right)^2\right] - 2E\left[\int_0^T a(T-\xi)dS\int_0^T a(T-\xi)S\sigma dW_\xi\right]$$
$$+E\left[\int_0^T (a(T-\xi)S\sigma)^2\, d\xi\right].$$

Lema 2.3.6 (Druhý moment v prípade váženého spriemerovania pre exponenciálnu váhovú funkciu)**.** *Pre $E[A_T^2]$ platí*
$$E[A_T^2] = \frac{S_0^2}{k^2}\frac{2}{\tilde{\alpha}}\left[\frac{\exp(\tilde{\beta}) - \exp(\tilde{\alpha})}{\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}} - \frac{\exp(\tilde{\beta}) - 1}{\tilde{\beta}}\right], \tag{2.14}$$
kde $\tilde{\alpha} = (r+\lambda)T$, $\tilde{\beta} = 2(r + \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\lambda)T$, $k = \int_0^T \exp(-\lambda\xi)d\xi$.

Dôkaz: *Označme $\nu = E[\xi^2] = \mu(u+d)-1$, $\eta = \pi^{-1}$, $\zeta = \varrho\eta$, $\omega = \exp(\lambda\cdot\Delta t)$, $\varrho = \omega\nu$, $\pi = \omega\mu$. Potom*
$$(n+1)^2S_0^{-2}E[A_n^2] = E\left[\sum_{i=0}^n S_0^{-1}S_{i\cdot\Delta t}e^{-\lambda(T-i\Delta t)}\right]^2 = E\left[e^{-\lambda T}\sum_{i=0}^n \omega^i\prod_{j=0}^i \xi_j\right]^2 =$$

$$= e^{-2\lambda T} E\left[\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\omega^i\omega^k\prod_{j=0}^{i}\xi_j\prod_{l=0}^{k}\xi_l\right] = e^{-2\lambda T}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\omega^i\omega^k E\left[\prod_{j=0}^{i}\xi_j\prod_{l=0}^{k}\xi_l\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\nu^i\omega^i\left(2\sum_{j=i+1}^{n}\omega^{j-i}\mu^{j-i}+1\right) = \sum_{i=0}^{n}\varrho^i\left(2\sum_{j=1}^{n-i}\pi^j+1\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\varrho^i\left(2\pi\frac{1-\pi^{n-i}}{1-\pi}+1\right) = \sum_{i=0}^{n}\varrho^i\left(\frac{2\pi}{1-\pi}+1-2\pi^{n+1}\frac{\eta^i}{1-\pi}\right) =$$

$$= \frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho}\left(\frac{2\pi}{1-\pi}+1\right) - 2\frac{\pi^{n+1}}{1-\pi}\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}.$$

Je zrejmé, že

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho} &= \frac{-1+e^{(\lambda+2r+s^2)T}}{(\lambda+2r+s^2)T} = \frac{-1+\exp(\tilde{\beta})}{\tilde{\beta}},\\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{2\pi}{1-\pi}+1\right) &= -\frac{2}{(\lambda+r)T} = -\frac{2}{\tilde{\alpha}},\\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{2\pi^{n+1}}{1-\pi} &= -\frac{2e^{(\lambda+r)T}}{(\lambda+r)T} = -\frac{2\exp(\tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}},\\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta} &= \frac{-1+e^{(r+s^2)T}}{(r+s^2)T}.
\end{aligned}$$

Potom

$$S_0^{-2}E[A_T^2] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\left\{\frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho}\left(\frac{2\pi}{1-\pi}+1\right)-2\frac{\pi^{n+1}}{1-\pi}\frac{1-\zeta^{n+1}}{1-\zeta}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\tilde{\alpha}}\left[\frac{\exp(\tilde{\beta})-\exp(\tilde{\alpha})}{\tilde{\beta}-\tilde{\alpha}} - \frac{\exp(\tilde{\beta})-1}{\tilde{\beta}}\right].$$

Poznámka: Tento vzorec je skoro totožný so vzorcom pre jednoduché spriemerovanie, až na to, že namiesto parametrov α, β tu vystupujú $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. Je zrejmé, že $\lim_{\lambda\to 0}\tilde{\alpha} = \alpha$ a $\lim_{\lambda\to 0}\tilde{\beta} = \beta$.

Podarilo sa nám odvodiť prvé dva momenty pre exponenciálne vážené aritmetické spriemerovanie.

2.4 Odhady parametrov

V tejto časti odhadneme momentovou metódou parametre lognormálneho rozdelenia.

Nech ψ je náhodná veličina s lognormálnym rozdelením s parametrami φ, χ. Potom hustota pravdepodobnosti je

$$f_\psi(x,\varphi,\chi) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \leq 0 \\ \frac{1}{x\chi\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x)-\varphi)^2}{2\chi^2}\right], & \text{pre } x > 0 \end{cases}$$

a distribučná funkcia

$$F_\psi(x,\varphi,\chi) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left[\frac{\ln(x)-\varphi}{\chi\sqrt{2}}\right], & \text{pre } x > 0 \end{cases}.$$

Ďalej platí

$$E[\psi] = e^{\varphi+\frac{1}{2}\chi^2},$$
$$Var[\psi] = \left(e^{\chi^2} - 1\right) e^{2\varphi+\chi^2}.$$

Keďže poznáme skutočné prvé dva momenty A_T, vieme aplikovať momentovú vetu a odvodiť parametre φ, χ. Platí

$$\begin{aligned} \varphi &= \ln(E[\psi]) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{Var[\psi]}{(E[\psi])^2}\right), \\ \chi^2 &= \ln\left(1 + \frac{Var[\psi]}{(E[\psi])^2}\right). \end{aligned}$$

Nakoľko $Var[\psi] = E[\psi^2] - E[\psi]^2$, tak

$$\begin{aligned} \varphi &= \ln(E[\psi]) - \frac{1}{2}\ln E[\psi^2] + \ln(E[\psi]) = 2\ln(E[\psi]) - \frac{1}{2}\ln E[\psi^2], \\ \chi^2 &= \ln\frac{E[\psi^2]}{(E[\psi])^2}. \end{aligned}$$

Po dosadení $E[\psi]$ a $E[\psi^2]$ dostávame

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\ln\left(S_0\frac{\exp(\alpha)-1}{\alpha}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(S_0^2\frac{2}{\alpha}\left[\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{\exp(\beta)-1}{\beta}\right]\right), \\ \chi^2 &= \ln\frac{S_0^2\frac{2}{\alpha}\left[\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{\exp(\beta)-1}{\beta}\right]}{S_0^2\left(\frac{\exp(\alpha)-1}{\alpha}\right)^2} = \ln\frac{\frac{2}{\alpha}\left[\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{\exp(\beta)-1}{\beta}\right]}{\left(\frac{\exp(\alpha)-1}{\alpha}\right)^2}. \end{aligned}$$

Ak si označíme $\kappa = \frac{\exp(\alpha)-1}{\alpha}$ a $\theta = \frac{2}{\alpha}\left[\frac{\exp(\beta)-\exp(\alpha)}{\beta-\alpha} - \frac{\exp(\beta)-1}{\beta}\right]$, tak potom

$$\begin{aligned}\varphi &= \ln S_0 + 2\ln\kappa - \frac{1}{2}\ln\theta,\\ \chi^2 &= \ln\theta - 2\ln\kappa,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{e^{rT}-1}{rT},\\ \theta &= \frac{2}{rT}\left[\frac{\exp(2(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T)-\exp(rT)}{2(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T-rT} - \frac{\exp(2(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T)-1}{2(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}\right].\end{aligned}$$

Potom

$$V(S,0) = e^{-rT}\mathbb{E}_Q[(A_T-E)^+] = e^{-rT}\int_0^\infty (x-E)^+ f_\psi(x,\varphi,\chi)\,dx =$$

$$= e^{-rT}\int_E^\infty (x-E)\frac{1}{x\chi\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln(x)-\varphi)^2}{2\chi^2}\right]\,dx.$$

2.5 Metóda Monte-Carlo simulácií

Pomocou programu (viď. kapitolu 4.1) si môžeme pre dané počiatočné hodnoty S, E, r, σ, T vygenerovať možné realizácie A_T.

Ak sme zvolili hodnoty nasledovne $S = 1, \sigma = 0.1, r = 0.05, T = 0.5$, tak sme dostali, že log-normálny fit dobre aproximuje vygenerované rozdelenie (viď. obr. 2.2).

Ak sme zvolili hodnoty nasledovne $S = 1, \sigma = 0.5, r = 0.15, T = 2$, tak sme dostali, že log-normálny fit zle aproximuje vygenerované rozdelenie (viď. obr. 2.3). Pre tieto dáta sa ukazuje lepším tzv. **Generalized extreme value** rozdelenie (viď. obr. 2.4).

Generalized extreme value Nech η je generalized extreme value rozdelenie s parametrami μ, σ, ξ, tak potom pre hustotu platí

$$f_\eta(x,\mu,\sigma,\xi) = \frac{1}{\sigma}\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{\frac{-1}{\xi-1}}\exp\left\{\left[1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{\frac{-1}{\xi}}\right\}.$$

Generalized extreme value rozdelenie kombinuje 3 jednoduchšie rozdelenia (Gumbel, Frechet, Weibull) do jediného rozdelenia. Výhodou je, že keď fitujeme dáta týmto rozdelením, môžeme nechať "dáta rozhodnúť", z akého rozdelenia pochádzajú.

Rozdelenia, ktorých chvosty klesajú exponenciálne (ako napríklad normálne rozdelenie) sú typu I (Gumbel). Rozdelenia, ktorých chvosty klesajú pomalšie, ako exponenciálne (napr. Studentovo t-rozdelenie) sú typu II (Frechet). Rozdelenia s konečnými chvostami (ako napr. beta rozdelenie) sú typu III (Weibull). Podrobnejšie viď. napr. v [3], [2], [5].

Obrázok 2.2: Odhad hustoty A_T pre $S = 1, \sigma = 0.1, r = 0.05, T = 0.5$ a lognormálny fit. V tomto prípade lognormálny fit je uspokojivý. Odhad prvého momentu A_T bol 1.012597909886208, vypočítaný pomocou vzorca 1.012604820977154. Odhad druhého momentu A_T bol 1.027084311343816, vypočítaný pomocou vzorca 1.027090329394937. Kernelová funkcia pre jednotlivé typy odhadu je nasledovná: normal - $k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}u^2)$; Epanechnikov - $k(u) = \frac{3}{4}(1-u^2)$, pre $|u| \leq 1$; box - $k(u) = \frac{1}{2}$, pre $|x| \leq 1$; triangle - $k(u) = 1 - |u|$, pre $|u| \leq 1$. Viac o kernelových odhadoch hustoty viď. [6].

Obrázok 2.3: Odhad hustoty A_T pre $S = 1, \sigma = 0.5, r = 0.15, T = 2$ a lognormálny fit. V tomto prípade lognormálny fit nie je uspokojivý. Odhad prvého momentu A_T bol 1.164355634098404, vypočítaný pomocou vzorca 1.166196025253344. Odhad druhého momentu A_T bol 1.631399373931964, vypočítaný pomocou vzorca 1.639432718563080.

2.6 Numerické výsledky

V tabuľke 2.1 uvádzame numerické hodnoty a porovnanie s inými metódami. Parametre použité pri výpočte sú $S = 100, T = 1, \sigma = 0.05$.

2.6.1 Plánované vylepšenia

V budúcnosti plánujeme použiť aproximáciu s tzv. posunutým log-normálnym rozdelením (ak η je lognormálne rozdelenie, tak $\eta + c$ je posunuté lognormálne rozdelenie), resp. Generalized extreme value rozdelením. Keďže tieto rozdelenia sú 3-parametrické, na ich odhad musíme ešte vypočítať $E[A_T^3]$.

2.6.2 Zovšeobecnenia

Uvedený vzorec na oceňovanie bol pre $t = 0$. Ak sme v čase $0 < t < T$ a poznáme $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau d\tau$, tak potom $A_T|A_t = \frac{t}{T}A_t + \frac{T-t}{T}A_{T-t}(S_t, T-t)$. Takže vieme vypočítať cenu opcie aj v čase $0 < t < T$.

Ak by sme uvažovali aj dividendovú mieru q, tak oceňovacia formulka sa zmení len tak, že namiesto r budeme používať $r - q$.

Obrázok 2.4: Histogram A_T pre $S = 1, \sigma = 0.5, r = 0.15, T = 2$ a dva fity (generalized extreme value, lognormálny fit).

E	r	RS-PDE	T-LB	T-UB	AA	LN	MC
100	0.05	2.621	2.7162	2.7162	2.7279	2.85755	2.70776
105	0.05	0.439	0.3372	0.3374	0.3257	0.35265	0.33706
100	0.09	4.185	4.3082	4.3084	4.3173	4.71558	4.31100
105	0.09	1.011	0.9583	0.9585	0.9561	1.04839	0.94235
100	0.15	6.777	6.7944	6.7946	6.7963	7.89423	6.78619
105	0.15	2.639	2.7444	2.7446	2.7559	3.19084	2.73807

Tabuľka 2.1: Tabuľka cien opcií pre $S = 100, T = 1, \sigma = 0.05$. RS–PDE sú hodnoty získané pomocou riešenia PDR (Roger a Shi) T–LB a T–UB sú dolný a horný odhad od Thompsona (2000). AA je analytická aproximácia [14]. LN je aproximácia pomocou Log-normálneho fitu, MC - je cena získaná z MC simulácie (viď. kapitola 4.2).

Kapitola 3

Zhrnutie

Hlavným prínosom tejto práce je odvodenie prvých dvoch momentov náhodnej premennej A_T v prípade váženého aritmetického spriemerovania. Taktiež uvádzame alternatívny spôsob odvodenia prvých dvoch momentov A_T v prípade obyčajného spriemerovania.

Aj keď presnosť odvodeného aproximatívneho explicitného vzorca na cenu ázijskej average rate opcie je postačujúca len pre malé hodnoty σ a T, máme víziu vylepšiť tento vzorec použitím **generalized extreme value** rozdelenia.

Kapitola 4

Prílohy

4.1 Monte-Carlo simulácia

```
%Vstupne parametre
sigma  =0.5;r =0.15;T=2;E=1;S=1;
%Vypocet
n=200;m = 100000;dt = T/n;
u = exp(sigma *sqrt(dt));
d = exp(-sigma *sqrt(dt));
p = (exp(r*dt)-d)/(u-d);
values=[];
for i = 1:m
  tresh = (( rand(1,n) < p )+0)*(u-d)+d;  temp=0;
  for j=1:n
     temp = (temp+1)*tresh(j);
  end
  temp = (temp + 1)/(n+1);  values(i)= temp;
end
a=r*T; b=2*(r+0.5*sigma^2)*T;
format long
disp('Prvy moment')
mean(values)
```

```
VzorecPrvyMoment = (exp(r*T)-1)/(r*T)
disp('Druhy moment')
mean(values.^2)
VzorecDruhyMoment = 2/(a)*( (exp(b)-exp(a))/(b-a)-(exp(b)-1)/(b) )
% Odhad hustory
hname = {'normal' 'epanechnikov' 'box' 'triangle','lognormal fit'};
colors = {'r' 'b' 'g' 'm'};
for j=1:4
    [f,x] = ksdensity(values,'kernel',hname{j});
    hold on;
    plot(x,f,colors{j});
end
legend(hname{:});
% Log-normal fit
phi = 2*log(VzorecPrvyMoment)-0.5*log(VzorecDruhyMoment)
chi = sqrt(log( VzorecDruhyMoment/VzorecPrvyMoment^2 ))
y=lognpdf(x,phi,chi');
plot(x,y,'-x')
hold off
```

4.2 Ocenenie ázijskej opcie pomocou Monte Carlo simulácií

```
sigma  =0.5;r =0.15;T=2;E=1;S=1; %Vstupne parametre
n=200;m = 100000;dt = T/n; %Vypocet
u = exp(sigma *sqrt(dt));
d = exp(-sigma *sqrt(dt));
p = (exp(r*dt)-d)/(u-d);
values=[];
for i = 1:m
  tresh = (( rand(1,n) < p )+0)*(u-d)+d;  temp=0;
  for j=1:n
     temp = (temp+1)*tresh(j);
  end
  temp = (temp + 1)/(n+1);  values(i)= temp;
end
index = S*values> E;
exp(-r*T)*1/m*sum( (S*values-E).*index)
```

Literatúra

[1] Dai, T., Huang, G., Lyuu, Y.,: *An efficient convergent lattice algorithm for Europan Asian options*, Applied Mathematics and Computation **169** (2) 2005, 1458-1471.

[2] Embrechts, P., Klüppelberg, C.,Mikosch, T.,: *Modelling extremal events for insurance and finance*, Berlin, Spring Verlag, 1997.

[3] Help k programu Matlab 7.6.0.324 (R2008a).

[4] Kwok, Y. K.,: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Singapore, Springer - Verlag, 1998.

[5] Leadbetter, M.R., Lindgreen, G., Rootzén, H.,: *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer-Verlag, 1983, ISBN 0-387-90731-9.

[6] Li, Qi, Racine, Jeffrey S.,: *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*, Princeton University Press, 2007, ISBN 0691121613.

[7] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V.,: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava, EPOS, 2005.

[8] Milevsky, M.A., Posner, S.E.,: *Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution*, J. Finan. Quant. Anal. **33** 1998, 409–422.

[9] Oksendal,B. K.,: *Stochastic Differential Equations: An introduction with Applications*, Berlin, Springer, 2003.

[10] Posner, S.E., Milevsky, M.A.,: *Valuing Exotic Options by Approximating SPD with Higher Moments*, Journal of Financial Engineering **7** (2), 109-125.

[11] Posner, S.E., Milevsky, M.A.,: *A closed-form approximation for valuing basket options*, Journal of Derivatives **5** 1998, 54-61.

[12] Ševcovič, D., Stehlíková, B. , Mikula, K.,: *Analytical and numerical methods for pricing derivative securities*, Nakladateľstvo STU, Bratislava 2009.

[13] Turnbull, S., Wakeman, L.,: *A quick algorithm for pricing European average options*, Journal of Financial and Quantitative Analysis **26** 1991, 377-389.

[14] Zhang, Jin, E.,: *A semi-analytical method for pricing and hedging continously sampled arithmetic average rate options*, Journal of Computational Finance **5** (1) 2001, 59-79.