UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA
V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

Stenové rankingové zafarbenia rovinných grafov

ŠTUDENTSKÁ VEDECKÁ KONFERENCIA

Bc. Peter Šugerek

2009

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA
V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA
Ústav matematických vied

Stenové rankingové zafarbenia rovinných grafov

ŠTUDENTSKÁ VEDECKÁ KONFERENCIA

Bc. Peter Šugerek

Vedúci práce: Prof. RNDr. Stanislav Jendroľ, DrSc.

Košice 2009

Vyhlásenie

Čestne vyhlasujem, že som túto magisterskú prácu vypracoval samostatne na základe vedomostí získaných štúdiom a s pomocou uvedenej literatúry.

. . . .

Bc. Peter Šugerek

Poďakovanie

Moje poďakovanie patrí prof. RNDr. Stanislavovi Jendroľovi, DrSc. za odborné vedenie, pripomienky a cenné rady, ktoré mi poskytol pri vypracovaní tejto záverečnej práce.

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá problémom stenového rankingového zafarbenia vrcholov rovinných grafov. Stenové rankingové zafarbenie pre rovinný graf je odvodené od rankingového zafarbenia grafu, teda takého zafarbenia vrcholov grafu, že na každej ceste s koncovými vrcholmi rovnakej farby musí byť vrchol zafarbený vyššou farbou. Pre stenové rankingové zafarbenie sa v rovinnom grafe táto podmienka obmedzuje iba na stenové cesty. Najmenší počet farieb, pre ktorý existuje stenové rankingové zafarbenie rovinného grafu sa nazýva stenové rankingové číslo. V práci sa nachádzajú techniky ako konštruovať tento typ zafarbenia a taktiež odhady stenového rankingového čísla vybraných typov rovinných grafov. Časť práce skúma stenové rankingové číslo konkrétnych rovinných grafov.

Kľúčové slová: rovinný graf, stenové rankingové zafarbenie, stenové rankingové číslo

Abstract

Submitted thesis deals with problem of face ranking colouring of plane graphs. Face ranking colouring of plane graphs is derived from ranking colouring. What is such a vertex colouring, where on each path with ending vertices of the same colour, must be a vertex coloured with a higher colour. For the face ranking colouring is this condition limited only on face paths. The smallest number of the colours for which there exists a face ranking colouring is called face ranking number. In this thesis are presented techniques how to construct this kind of plane graphs vertex colouring. There are also estimations of ranking numbers for special types of plane graphs.

Key words: plane graph, face ranking colouring, face ranking number

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Jedna z oblastí matematiky, ktorá sa v ostatnom čase veľmi intenzívne rozvíja, je aj teória grafov. Sem patria napríklad aj problémy týkajúce sa zafarbenia grafov. Jedným takýmto typom zafarbenia je rankingové zafarbenie grafu, t.j. také zafarbenie vrcholov grafu, že pre každú cestu grafu s koncovými vrcholmi rovnakej farby existuje na tejto ceste vrchol zafarbený vyššou farbou. Niekedy je potrebné odpovedať na otázku, aký je minimálny počet farieb potrebný na zafarbenie grafu. Minimálny počet farieb potrebný na rankingové zafarbenie vrcholov grafu G sa označuje $\chi_r(G)$. Vo všeobecnosti zistiť hodnotu $\chi_r(G)$ je NP-úplný problém. Rankingové číslo bolo pravdepodobne po prvýkrát zavedené v prácia [13].

V triede planárnych grafov sú tieto úvahy jednoduhšie, avšak situácia je stále dostatočne zložitá. Vychádzajúc z poznatkov o rankingovom zafarbení grafov obmedzíme podmienky kladené na toto zafarbenie vzhľadom ku stenám rovinného grafu. Budeme preto skúmať stenové rankingové zafarbenie rovinných grafov, teda také zafarbenie vrcholov rovinneho grafu, že pre každú stenovú cestu s koncovými vrcholmi rovnakej farby existuje na tejto stenovej ceste vrchol zafarbený vyššou farbou. Pre daný rovinný graf G sa pýtame, aký je minimálny počet farieb potrebných na stenové rankingové zafarbenie vrcholov. Toto číslo označujeme $\chi_{sr}(G)$.

Najprv uvedieme niekoľko poznatkov o rankingovom zafarbení jednoduchých grafov ako sú cesty a kružnice. Krátko porovnáme rankingové a stenové rankingové zafarbenie. Uvedieme odhady pre niektoré jednoduché konštrukcie nových rovinných grafov z rovinných grafov s už známym χ_{sr}. Ďalej sa budeme venovať presnému stanoveniu hodnôt $\chi_{sr}(G)$ pre pravidelné rovinné grafy, napríklad pre grafy Platónskych mnohostenov a grafy Archimedovských mnohostenov.

Aplikácie rankingového zafarbenia nachadzáme aj v informatike a to pri VLSI priestorovom usporiadaní (skratka z anglického Very-Large-Scale Integration) alebo aj pri paralelnej faktorizácií matíc.

1 Základné pojmy a definície

Teraz uvedieme pojmy a definície, ktoré budeme potrebovať a používať. Základný pojem je pre nás graf. Pod grafom rozumieme usporiadanú dvojicu množín $G = (V, E)$, kde V je konečná množina vrcholov a E je podmnožina množiny $\mathcal{P}_2(V)$ dvojprvkových podmnožín množiny V. Prvky množiny E sa nazývajú hrany. Nakreslenie grafu do roviny je zobrazenie vrcholov a hrán do roviny také, že každému vrcholu $v \in V$ priradí nejaký bod roviny (krúžok) B_v a každej hrane $e \in E$ spájajúcej vrcholy $u, v \in V$ priradíme oblúk (jednoduchú krivku) spájajúci body B_u, B_v, pričom má platiť, že body roviny priradené rôznym vrcholom sú rôzne, oblúk sám seba nepretína, oblúky okrem svojich koncových bodov neobsahujú žiadne body roviny, ktoré by zodpovedali nejakým vrcholom grafu.

Nakreslenie grafu a graf budeme stotožňovať. Ak pre graf existuje také nakreslenie, že žiadne dve jeho hrany sa nepretínajú, hovoríme, že graf je planárny. Také nakreslenie grafu, že žiadne dve jeho hrany sa nepretínajú, sa volá rovinný graf. Nakreslenie rovinného grafu do roviny rozdelí ju na súvislé celky, ktoré nazveme stenami grafu. Ak sú dva vrcholy spojené hranou nazývajú sa susedné vrcholy. Postupnosť vrcholov $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ nazveme cesta, ak sú vrcholy v_i, v_{i+1} susedné pre $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ a žiaden vrchol sa v tejto postupnosti nevyskytuje viackrát. Pod dĺžkou cesty rozumieme počet hrán incidentných s touto cestou. Uzavretú cestu nazveme kružnica.

Rovinný graf G môžeme reprezentovať ako usporiadanú trojicu množín $G = (V, E, F)$, kde V je množina vrcholov grafu, E je množina hrán grafu a F je množina stien grafu. Veľkosť alebo tiež stupeň steny α rovinného grafu sa rozumie dĺžka najkratšieho uzavretého sledu obsahujúceho všetky hrany incidujúce so stenou α. Stupeň steny α označíme $\deg(\alpha)$. Stenová cesta na stene α je cesta chápaná ako postupnosť hrán idúcich za sebou na stenovom slede steny α.

Farby budeme reprezentovať množinou čísel: $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, k\}$, $k \in N$, $k \geq 1$. Vrcholovým zafarbením nazveme zobrazenenie $\mathfrak{c} : V \to \mathcal{C}$. Graf je regulárne zafarbený, ak každé dva jeho susedné vrcholy majú priradené rôzne farby ($\mathfrak{c}(u) \neq \mathfrak{c}(v)$). Najmenšie k, pre ktoré existuje regulárne zafarbenie grafu G, nazveme *chromatické číslo grafu* G a označíme $\chi_0(G)$.

Pod *rankingovým k-zafarbením* vrcholov grafu G rozumieme zobrazenie $\mathfrak{r} : V \to \mathcal{C}$ také, že pre každú cestu P grafu G s koncovými vrcholmi x a y, pre ktoré je

$\mathfrak{r}(x) = \mathfrak{r}(y)$, existuje na tejto ceste medzi vrcholmi x a y vrchol z taký, že $\mathfrak{r}(z) > \mathfrak{r}(x) = \mathfrak{r}(y)$. Najmenšia honota k, pre ktorú existuje *rankingové k-zafarbenie* sa nazýva *rankigové číslo*. Označíme ho $\chi_r(G)$. (porovnaj s [6], [13])

Pre rovinný graf definujeme na základe rankingového zafarbenia stenové rankingové zafarbenie vrcholov.

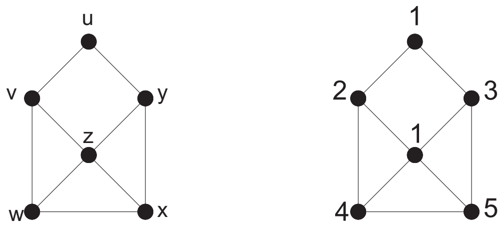
Definícia 1.1. Pod *stenovým rankingovým k-zafarbením* vrcholov rovinného grafu G rozumieme zobrazenie $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}} : V \to \mathcal{C}$ také, že každé dva vrcholy x a y ležiace na tej istej stene α, pre ktoré je $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x) = \mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(y)$, existuje na každej stenovej ceste medzi týmito vrcholmi vrchol z, že $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z) > \mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x) = \mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(y)$. Najmenšia hodnota k, pre ktorú existuje *stenové rankingové k-zafarbenie* nazveme *stenové rankigové číslo* a označíme $\chi_{sr}(G)$.

Na popis rovinného grafu budeme často využívať to, aké steny obsahuje. Pre pravidelné mnohosteny, ktoré majú okolo každého vrchola rovnaké typy stien je vhodný zápis $(d_1, d_2, \ldots, d_t)$-mnohosten. Znamená to, že vrchol stupňa t inciduje so stenami $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$ stupňov $d_1, d_2, \ldots, d_t$, pričom každá z dvojíc β_i, β_{i+1}, pre $i = 1, 2, \ldots, (t-1)$ a β_t, β_1 má spoločnú práve jednu hranu incidentnú s daným vrcholom. Stupne stien v zápise sú v takom poradí, v akom poradí sa nachádzajú steny okolo vrchola.

Definícia 1.2. Nech α je stena grafu G incidentná s vrcholmi $v_1, v_2, \ldots, v_t$, pričom v_i, v_{i+1} sú susedné vrcholy (indexy sa počítajú vzhľadom k modulo t). Ďalej nech pre $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ je $c_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ predstavujú farby. Postupnosť $(c_1, c_2, \ldots, c_t)$ znamená, že pre $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ vrchol v_i má farbu c_i. Túto postupnosť nazveme farebná postupnosť (steny α).

2 Všeobecné pozorovania rankingového zafarbenia

Uvedieme malý príklad ako rankingovo farbiť. Na *Obrázku 1* je graf s vrcholmi u, v, w, x, y, z a hranami $\{u, v\}$, $\{v, w\}$, $\{w, x\}$, $\{x, y\}$, $\{y, u\}$, $\{z, v\}$, $\{z, w\}$, $\{z, x\}$, $\{z, y\}$. Rankingové zafarbenie tohto grafu je napríklad zafarbenie $\mathfrak{r}(u) = 1$, $\mathfrak{r}(v) = 2$, $\mathfrak{r}(y) = 3$, $\mathfrak{r}(z) = 1$, $\mathfrak{r}(w) = 4$, $\mathfrak{r}(u) = 5$. Vidieť ľahko že každá cesta tohto grafu s koncovými vrcholmi rovnakej farby spĺňa podmienku rankingového zafarbenia.



Obr. 1: Ilustračný príklad rankingového zafarbenia

Rankingové číslo nesúvislého grafu je rovnaké ako maximum z rankingových čísel komponentov grafu.

$\chi_r(K_n) = n$

$\chi_r(G) \leq n$ pre každý graf na n vrcholoch.

Rankingové zafarbenie úzko súvisi s cestou a kružnicou grafu. Poznatky o rankingovom zafarbení cesty a kružnice už sú známe a budeme ich ďalej často využívať, preto ich uvedieme podrobnejšie.

2.1 Rankingové zafarbenie cesty

Lema 2.1. *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf a nech $\mathfrak{r}$ je rankingové k-zafarbenie grafu G. Potom G obsahuje najviac jeden vrchol x taký, že $\mathfrak{r}(x) = k$.*

Dôkaz. Nech G obsahuje aspoň dva vrcholy zafarbené farbou k. Kedže je G súvislý, existuje medzi týmito vrcholmi cesta, na ktorej musí byť vrchol zafarbený farbou väčšou ako k. □

Lema 2.2. *Nech P je cesta na n vrcholoch. Potom na zafarbenie tejto cesty potrebujeme aspoň $\lceil \log_2(n + 1) \rceil$ farieb. Navyše táto hranica je dosiahnuteľná.*

Dôkaz. Položme $k = \lceil \log_2(n+1) \rceil$, potom $k \geq \log_2(n+1) > k-1$. Z toho $2^k \geq 2^{\log_2(n+1)} > 2^{k-1}$, teda je $n+1 > 2^{k-1}$, preto je

$$n > 2^{k-1} - 1.$$

Keby na zafarbenie cesty stačilo menej ako k farieb, najvyššia použitá farba by bola nanajvýš $(k-1)$. Z *Lemy 2.1* je zrejme, že najvyššia farba môže byť použitá nanajvýš raz, teda práve na jeden vrchol. Odobratím toho vrchola sa cesta rozpadne na dve kratšie cesty, na ktorých môžeme úvahu zopakovať, preto na každej z týchto dvoch kratších ciest môžeme použiť nanajvýš raz farbu $(k-2)$, a tak ďalej.

Teda farbu $(k-1)$ použijeme najviac raz (t.j. 2^0), farbu $(k-2)$ použijeme najviac dva razy (t.j. 2^1), farbu $(k-3)$ použijeme najviac štyri razy (t.j. 2^2) a tak ďalej, až farbu 1 použijeme najviac (2^{k-2}) razy.

Takto vieme zafarbiť najviac $\sum_{i=1}^{k-2} 2^i$ vrcholov.

$$\sum_{i=1}^{k-2} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-2} = \frac{2^{k-1}-1}{2-1} = 2^{k-1} - 1$$

Vrcholov na ceste P je n. Zafarbiť menej ako k farbami vieme nanajvýš $(2^{k-1} - 1)$ vrcholov, ale z vyššie uvedeného vieme, že vrcholov je viac ako $(2^{k-1} - 1)$. Dostali sme sa do sporu z predpokladom, že najvyššia použitá farba može byť najviac $(k-1)$.

Ukážeme ešte, že táto hranica je dosiahnuteľná. Nech $P = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ je naša cesta na n vrcholoch. To je konečné prirodzené číslo. Pre každé prirodzené číslo p existuje k prirodzené, že $p \leq 2^k$, teda aj pre $p = n$. Pre každé číslo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (množina indexov vrcholov cesty P) existuje jeho zápis v dvojkovej sústave v tvare:

$$i = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_k \cdot 2^k,$$

kde $a_j \in \{0, 1\}$ pre $j = 1, 2, \ldots, k$. (Pre $i = 1$ to je $1 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + \cdots + 0 \cdot 2^k$.)

Teraz zostrojíme zafarbenie $\mathfrak{r}$ pre cestu P:

$$\mathfrak{r}(v_i) = min\{(j+1) : a_j \neq 0, j \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}\}.$$

Stačí overiť, že ak na ceste P sú vrcholy u, v zafarbené rovnakou farbou, tak je medzi nimi vrchol w, ktorý má farbu vyššiu. Potom si len stačí uvedomiť, že každá kratšia časť cesty P, s koncami rovnakej farby, tiež spĺňa podmienky rankingového zafarbenia. Nech teda $u = v_i$, $v = v_j$, $i < j$. Nech $\mathfrak{r}(v_i) = \mathfrak{r}(v_j) = c + 1$. (Farba $c + 1$

je použitá aspoň dvakrát. Ak najvyššia použitá farba je $k+1$, tak tak z *Lemy 2.1* vieme, že to môže byť iba farba $c+1 < k+1$.) Keďže v_i a v_j majú farbu $c+1$, znamená to, že existujú koeficienty a_{c+1}, a_{c+2}, $\ldots$, a_k, b_{c+1}, b_{c+2}, $\ldots$, $b_k \in \{0,1\}$ také, že:

$$i = 2^c + a_{c+1}2^{c+1} + a_{c+2}2^{c+2} + \cdots + a_k 2^k$$

$$j = 2^c + b_{c+1}2^{c+1} + b_{c+2}2^{c+2} + \cdots + b_k 2^k$$

Z definície zafarbenia $\mathfrak{r}$ vyplýva, že v dvojkovom zápise pre i aj j sú koeficenty s indexom menším ako index c rovné nule. Ukážeme, že vzdialenosť medzi vrcholmi v_i a v_j je aspoň 2^{c+1}. Spočítajme rozdiel:
$j-i = (2^c+b_{c+1}2^{c+1}+b_{c+2}2^{c+2}+\cdots+b_k2^k)-(2^c+a_{c+1}2^{c+1}+a_{c+2}2^{c+2}+\cdots+a_k2^k) =$
$= (b_{c+1}-a_{c+1})2^{c+1}+(b_{c+2}-a_{c+2})2^{c+2}+\cdots+(b_k-a_k)2^k$. Keďže $i<j$, tak existuje aspoň jeden nenulový koeficient $(b_l-a_l)=1$, pre nejaké $l \in \{(c+1),(c+2),\ldots,k\}$. Potom $j-i > \min\{(b_l-a_l)2^l : (b_l-a_l) \neq 0,\ l \in \{(c+1),(c+2),\ldots,k\}\} > 2^{c+1}$. Z toho už vyplýva: $j > i+2^{c+1}$.
Uvažujme teraz číslo $m = i+2^c = (2^c+a_{c+1}2^{c+1}+a_{c+2}2^{c+2}+\cdots+a_k2^k)+2^c =$ $= (a_{c+1}+1)2^{c+1}+a_{c+2}2^{c+2}+\cdots+a_k2^k$. Z toho zápisu vidieť, že dvojkový zápis čísla m má koeficienty pri členoch 2^l, $l \in \{0,1,\ldots,c\}$ rovné nule. Našli sme teda vrchol $w=v_m$, ktorý je na ceste P medzi vrcholmi u,v a je zafarbený aspoň farbou $c+2$, čo je vyššia farba ako $c+1$.

Ak t je najvyššia použitá farba na ceste P, tak táto cesta obsahuje nanajvýš $2^{t-1}+(2^{t-1}-1)$ vrcholov, lebo na cestu s 2^t vrcholmi už je použitá aj farba $t+1$. Cesta P obsahuje tiež viac ako $(2^{t-1}-1)$ vrcholov, lebo táto farba je najskôr použitá pre vrchol 2^{t-1}. Preto platí:

$$2^{t-1}+(2^{t-1}-1) = 2^t-1 \geq n > 2^{t-1}-1$$

Z toho po malých úpravach dostávame:

$$2^t \geq n+1 > 2^{t-1}.$$

Túto nerovnosť zlogaritmujeme pri základe 2 a dostávame:

$$t \geq \log_2(n+1) > t-1.$$

Keďže t je celé číslo, tak môžeme zapísať $\lceil \log_2(n+1) \rceil = t$ a to je presne $t=k$. $\square$

2.2 Rankingové zafarbenie kružnice

Lema 2.3. *Nech $C = (V, E)$ je kružnica dĺžky aspoň 4 a nech $\mathfrak{r}$ je rankingové k-zafarbenie kružnice C. Potom C obsahuje najviac jeden vrchol $u \in V$ taký, že raz je použitá farba $k = \mathfrak{r}(u)$ a najviac jeden vrchol $v \in V$ taký, že je raz použitá farba $k - 1 = \mathfrak{r}(v)$.*

Dôkaz. Z predchádzajúcej *Lemy 2.1* vieme, že farba k je použitá najviac raz. Nech sú všetky farby $1, 2, \ldots, (k-1)$ požité aspoň dvakrát. Kedže je C kružnica, existujú medzi dvoma rôznymi nesusednými vrcholmi práve dve disjunktné cesty, teda aj medzi dvoma vrcholmi zafarbenými farbou $k-1$. Na každej z dvoch ciest musí byť vrchol zafarbený farbou väčšou ako $k-1$. Avšak farbou k nemôžu byť zafarbené dva rôzne vrcholy. □

Lema 2.4. *Nech C_n je kružnica dĺžky $n \geq 3$. Potom $\chi_r(C_n) = 1 + \lceil \log_2(n) \rceil$.*

Dôkaz. Kružnica C_n obsahuje n vrcholov. Položme $k = 1 + \lceil \log_2 n \rceil$, potom

$$k \geq 1 + \log_2 n > k - 1.$$

Z toho $k - 1 \geq \log_2 n > k - 2$, následne potom $2^{k-1} \geq 2^{\log_2 n} > 2^{k-2}$. Teda $n > 2^{k-2}$.

Keby na zafarbenie kružnice stačilo menej ako k farieb, najvyššia použitá farba by bola nanajvýš $(k-1)$. Z *Lemy 2.3* je zrejme, že najvyššia farba môže byť použitá nanajvýš raz a druhá najvyššia farba tiež raz. Odobratím vrcholov zafarbených týmito farbami sa kružnica rozpadne na dve cesty. Vrcholy na nich sú zafarbené tak, že farba $(k-3)$ sa použije spolu najviac dva razy (t.j. 2^1), farba $(k-4)$ sa použije najviac štyri razy (t.j. 2^2) a tak ďalej, až farbu 1 použijeme najviac (2^{k-3}) razy. Takto vieme zafarbiť najviac $2 + \sum_{i=1}^{k-3} 2^i$ vrcholov.

$$2 + \sum_{i=1}^{k-3} 2^i = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-2} = 1 + \frac{2^{k-2}-1}{2-1} = 1 + 2^{k-2} - 1 = 2^{k-2}$$

Vrcholov je n. Zafarbiť menej ako k farbami vieme nanajvýš (2^{k-2}) vrcholov, ale z vyššie uvedeného vieme, že vrcholov je viac ako (2^{k-2}). Dostali sme sa do sporu z predpokladom, že najvyššia použitá farba može byť najviac $(k-1)$.

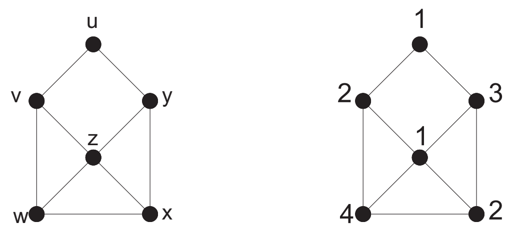
Ukážeme ešte ako zafarbiť kružnicu k farbami. Odoberme jeden vrchol x a s ním incidentné hrany z kružnice C. Vznikne tak cesta dĺžky $n-2$ obsahujúca $n-1$ vrcholov, ktorú vieme podľa *Lemy 2.2* zafarbiť $\lceil \log_2((n-1)+1) \rceil =$

$= \lceil \log_2 n \rceil = k - 1$ farbami. Všetky cesty na C, ktoré neobsahujú vrchol x spĺňajú podmienku rankingového zafarbenia . Odobratý vrchol zafarbíme farbou, ktorú sme ešte nepoužili a to vyššou od všetkých použitých, teda farbou k. Teraz všetky cesty, ktoré obsahujú vrchol x, spĺňajú podmienku rankingového zafarbenia triviálne. $\square$

3 Stenové rankingové zafarbenie

V ďalšom budeme skúmať stenové rankingové zafarbenie na planárnych grafoch. Splnenie rankingovej podmienky budeme požadovať iba na stenových cestách. Je potrebné ešte spomenúť, že stenové rankingové zafarbenie cesty a kružnice je to isté ako rankingové zafarbenie cesty a kružnice. *Lema 2.1* pre verziu stenového rankingového zafarbenia trojsúvislých rovinných grafov nemôže platiť, lebo neuvažujeme všetky cesty grafu. Dá sa vysloviť pre graf cesty.

Uvedieme malý príklad stenového rankingového zafarbenia. Na *Obrázku 2* je graf s vrcholmi u, v, w, x, y, z a hranami $\{u, v\}$, $\{v, w\}$, $\{w, x\}$, $\{x, y\}$, $\{y, u\}$, $\{z, v\}$, $\{z, w\}$, $\{z, x\}$, $\{z, y\}$. Stenové rankingové zafarbenie tohto grafu je napríklad zafarbenie $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(y) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(z) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w) = 4$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u) = 2$. Vidieť ľahko, že každá stenová cesta tohto grafu s koncovými vrcholmi rovnakej farby spĺňa podmienku stenového rankingového zafarbenia. V porovnaní s rankingovým zafarbením na *Obrázku 1*, teraz cesta $[v, z, x]$ nespĺňa podmienku rankingového zafarbenia, ale keďže sa nejedná o stenovú cestu podmienky stenového rankingového zafarbenia sú splnené.



Obr. 2: Ilustračný príklad stenového rankingového zafarbenia

3.1 Odhady pre rovinné grafy

Veta 3.1. *Nech G je (rovinný) graf. Potom*

$$(\chi_{sr}(G) \leq)\, \chi_r(G) \leq |V| - \kappa_0(G) + 1,$$

kde $\kappa_0(G)$ je číslo vrcholovej nezávislosti.

Dôkaz. Vezmime nezávislu množinu vrcholov grafu G. Týmto vrcholom dáme farbu 1. Ostatným vrcholom dáme rôzne farby. Takéto zafarbenie spĺňa podmienky rankingového zafarbenia, lebo na každej ceste s koncovými vrcholmi rovnakej farby, čiže farby 1, sa nachádza nejaký vrchol vyššej farby. V prípade ak uvažujeme rovinný graf je toto zafarbenie zároveň aj stenovým rankingovým zafarbením. □

Veta 3.2. *Nech G je rovinná triangulácia. Potom* $\chi_{sr}(G) = \chi_0(G)$.

Dôkaz. V rovinnej triangulácii G sú všetky steny trojuholníky. Kedže G je rovinný graf, tak podľa *Vety o štyroch farbách* je na regulárne zafarbenie $\mathfrak{c}$ grafu G potrebné použiť najviac štyri farby. V regulárnom zafarbení $\mathfrak{c}$ sú vrcholy incidentné s nejakou trojuholníkovou stenou zafarbené každý inou farbou, lebo dva susedné vrcholy musia mať farbu rôznu. Stenová cesta v rovinnej triangulácii obsahuje najviac 3 vrcholy, pričom každý vrchol na takej ceste má inú farbu. Za stenové rankingové zafarbenie $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}$ grafu G stačí zobrať regulárne zafarbenie $\mathfrak{c}$. Podmienky stenového rankingového zafarbenia sú potom pre G splnené triviálne. □

Veta 3.3. *Nech* $G = (V, E, F)$ *je rovinný graf a* Δ^* *je maximálny stenový stupeň grafu G. Potom* $1 + \lceil \log_2(\Delta^*) \rceil \leq \chi_{sr}(G)$.

Dôkaz. Uvažujme steny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ grafu G a nech BUNV $\deg_G(\alpha_1) = \Delta^*$. Nech stena α_1 inciduje so stenovou kružnicou dĺžky Δ^*, na ktorú je podľa *Lemy 2.4* potrebné použiť minimálne $1 + \lceil \log_2 \Delta^* \rceil$ farieb. Preto aj na stenové rankingové zafarbenie celého grafu G potrebujeme použiť najmenej toľko farieb.

□

Využijeme pre porovnanie pojem cyklické chromatické číslo použitý v článku [5]. Cyklické chromatické číslo $\chi_c(G)$ 2-súvislého rovinného grafu G je minimálny počet farieb priradený vrcholom grafu G, kde každé dva vrcholy incidentné s tou istou stenou majú rôznu farbu.

Ľahko vidieť, že pre každý dvojsúvislý roviný graf G platí:

$$\chi_{sr}(G) \leq \chi_c(G).$$

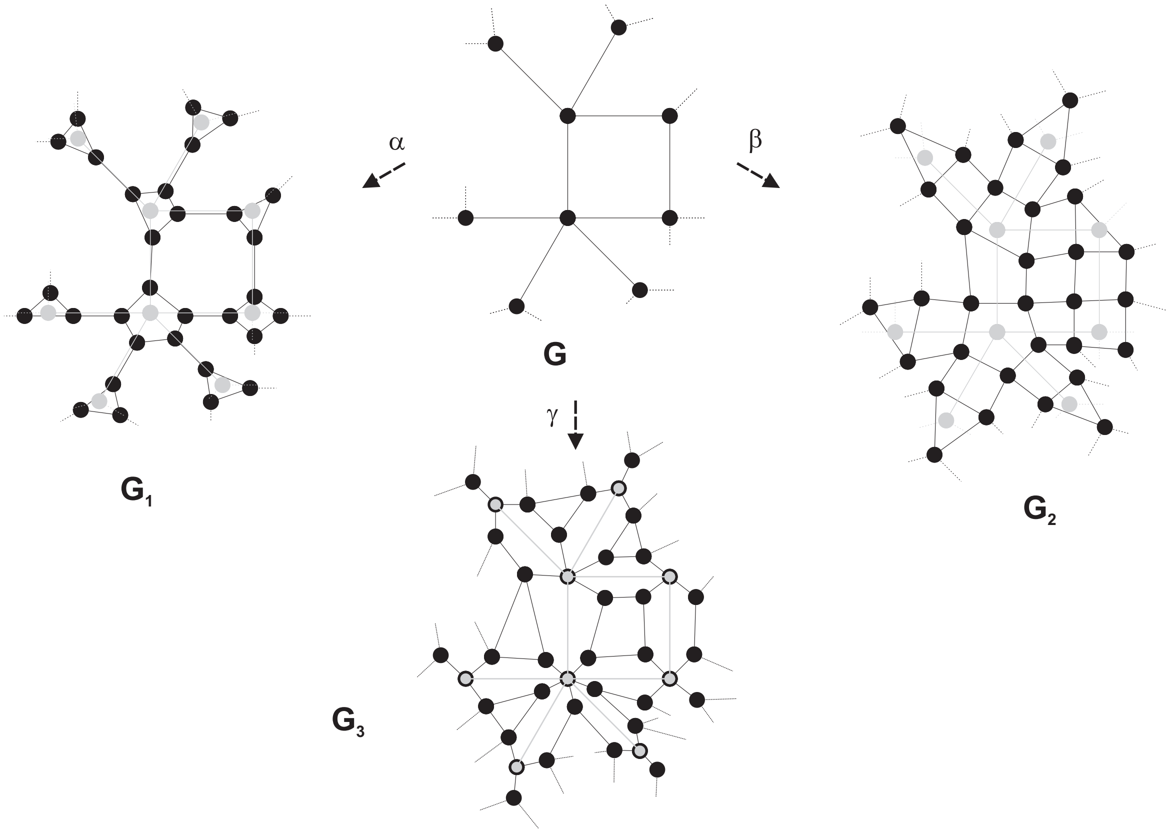
Využitím tohto pozorovania a výsledkov v článkoch [8], [9], [10], [15] získame nasledujúce tvrdenie.

Veta 3.4. *Nech G je dvojsúvislý rovinný graf a* Δ^* *maximálny stenový stupeň. Potom*
(i) $\chi_{sr}(G) \leq \lceil \frac{5\Delta*}{3} \rceil$.
(ii) Ak je G trojsuvislý, tak

$$\chi_{sr}(G) \leq \Delta^* + 1, \text{ pre } \Delta^* \geq 60,$$
$$\chi_{sr}(G) \leq \Delta^* + 2, \text{ pre } \Delta^* \geq 18.$$

3.2 Jednoduché transformácie rovinných grafov

Z rovinného grafu vieme jednoduchými konšrukciami získať nové rovinné grafy. Na *Obrázku 3* je znázornený princíp troch takýchto konštrukcií.



Obr. 3: Tri spôsoby rozšírenia grafu

α-**transformácia**: *Odseknutie vrchola* (Pozri *Obrázok 3 graf* G_1.)
Ku každej spoluincidujúcej dvojici (v, e) (vrchol, hrana) grafu G pridáme nový vrchol v' grafu G'. Hranou sú spojené také dva vrcholy $v'_1, v'_2 \in V(G')$, ktoré sú pridané buď dvojiciam (v_1, e), (v_2, e) pričom $e = \{v_1, v_2\}$ alebo dvojiciam (v, e_1) (v, e_2), kde e_1, e_2 sú icidentné so spoločnou stenou grafu G.

Tak je vrchol stupňa d grafu G nahradený v G' stenou, ktorá je d-uholníkom a n-uholníková stena v grafe G je nahradená v G' 2n-uholníkovou stenou, pričom dve pôvodne susedné steny v grafe G ostanú po nahradení naďalej susedné.

β**-transformácia**: *Odseknutie vrcholov a hrán* (Pozri *Obrázok 3 graf* G_2.)
Ku každej spoluincidujúcej dvojici (v, α) (vrchol - stena) grafu G pridáme nový vrchol v' grafu G'. Hranou sú spojené také dva vrcholy $v'_1, v'_2 \in V(G')$, ktoré sú pridané buď dvojiciam (v_1, α), (v_2, α), kde v_1, v_2 sú susedné v G alebo dvojiciam (v, α_1), (v, α_2), kde α_1, α_2 sú susedné steny v G.

Tak je vrchol stupňa d grafu G nahradený v G' d-uholníkovou stenou, hrana grafu G je nahradená v G' 4-uholníkovou stenou, dvojica susedných stien n-uholníková stena (α_1) a k-uholníková stena (α_2) v grafe G je nahradená v G' dvojicou stien n-uholníková stena a k-uholníková stena, ktorá je oddelená trojicou stien a to d_u-uholníkovou, 4-uholníkovou, d_v-uholníkovou stenou, kde $\{u, v\}$ je hrana incidentná s oboma stenami α_1, α_2 a d_u, d_v sú stupne vrcholov u a v koncov tejto hrany v G.

γ**-transformácia**: *Nahradenie hrán 6-uholníkmi* (Pozri *Obrázok 3 graf* G_3.)
Ku každej spoluincidujúcej dvojici (v, α) (vrchol - stena) grafu G pridáme nový vrchol v' grafu G', pričom každý vrchol grafu G je vrchol grafu G'. Hranou sú spojené také dva vrcholy $v'_1, v'_2 \in V(G')$, ktoré sú pridané buď dvojiciam $(v_1 \alpha)$, (v_2, α) pričom v_1, v_2 sú susedné v G alebo v'_1 je priradený k dvojici (v_1, α_1) a $v'_2 = v_1$.

Tak je v G dvojica susedných stien k-uholníková stena, n-uholníková stena nahradená v G' dvojicou k-uholníková stena, n-uholníková stena, ktorá je oddelená 6-uholníkovou stenou.

Lema 3.5. *Nech* $G = \{V, E, F\}$ *je d-regulárny rovinný graf a poznáme jeho stenové rankingové číslo* $\chi_{sr}(G)$. *Potom pre rovinný graf* $G' = \{V', E', F'\}$, *ktorý vznikol z* G α*-transformáciou alebo* β*-transformáciou platí:* $\chi_{sr}(G') \leq d \cdot \chi_{sr}(G)$

Dôkaz. Nech G je rankingovo zafarbený farbami z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$, pričom $k = \chi_{sr}(G)$.

Prípad 1: Nech G' vznikol z G α-transformáciou. Každému vrcholu $u \in V(G)$ pripadá práve d vrcholov z $V(G')$ zodpovedajúcich spoluincidujúcim dvojiciam $(u, e_1), (u, e_2), \ldots, (u, e_d)$. Zrejme $|V(G')| = d \cdot |V(G)|$.

Skonštruujeme zafarbenie ϕ grafu G'. Ak bol vrchol $u \in V(G)$ zafarbený farbou $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tak na zafarbenie vrcholov $v_{1_u}, v_{2_u}, \ldots, v_{d_u} \in V(G')$, ktoré v grafe G zodpovedajú spoluincidujúcim dvojiciam príslušným vrcholu u, použijeme farby $\{(j-1)d+1,\ (j-1)d+2, \ldots, (j-1)d+d = jd\}$, na každý vrchol inú farbu. Zrejme najvyššia použitá farba bude $k \cdot d = \chi_{sr}(G) \cdot d$.

Teraz overíme, že toto zafarbenie spĺňa podmienky na neho kladené. Každému vrcholu $u \in V(G)$ zodpovedá jedna stena $\beta \in F(G')$ stupňa d taká, že vrcholy s touto stenou incidujúce zodpovedajú, pre $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, spoluincidujúcim dvojiciam (u, e_i). Tieto vrcholy majú každý inú farbu. Teda steny zodpovedajúce vrcholom z G spĺňajú podmienky kladené na stenové rankingové zafarbenie triviálne.

Nech $V(\vartheta)$ je množina vrcholov incidentných so stenou $\vartheta \in F(G)$. Každý $u \in V(\vartheta)$ pokrýva práve dve hrany s touto stenou incidentné. Teda existujú práve dve spoluincidujúce dvojice (u, e_1), (u, e_2), ktoré prispievajú vrcholmi stene $\vartheta' \in F(G)$. Z každej steny $\vartheta \in F(G)$ vznikne stena $\vartheta' \in F(G')$ dvojnásobného stupňa.

Vezmime z grafu G' ľubovoľnú stenovú cestu t.j. $P'_{1i} = [v'_{1_1}, v'_{1_2}, v'_{2_1}, v'_{2_2}, \ldots, v'_{p_i}]$, resp. $P'_{2i} = [v'_{1_2}, v'_{2_1}, v'_{2_2}, \ldots, v'_{p_i}]$, $i \in \{1, 2\}$. Pretože vrcholy v'_{j1} a v'_{j2} pre $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ vznikli zo spoluincidujúcich dvojíc (u_j, e_1) a (u_j, e_2), kde e_1, e_2 sú hrany cesty incidentné s vrcholom u_j, tak ceste P'_{1i} aj P'_{2i} na stene ϑ v pôvodnom grafe G zodpovedá cesta $P = [u_1, u_2, \ldots, u_p]$. Ak sa na ceste P' nachádzajú dva vrcholy v', w' rovnakej farby, znamená to že v pôvodnom grafe sú im zodpovedajúce vrcholy rovnakej farby. Nemôže sa stať, že tieto dva vrcholy zodpovedajú nejakému jednému vrcholu z pôvodneho grafu, lebo takým vrcholom sme dali farby rôzne. Pôvodný graf sme mali rankingovo zafarbený, preto je na stenovej ceste P medzi týmito dvoma vrcholmi nejaký vrchol zafarbený vyššou farbou. Tento vrchol zodpovedá dvojici vrcholov na ceste P' a tie, podľa toho ako sme navrhli zafarbenie, majú farby rôzne a vyššie ako farby vrcholov v', w'.

Prípad 2: Nech G' vznikol z G β-transformáciou. Každému vrcholu $u \in V$ zodpovedá práve d vrcholov z V' zodpovedajúcich spoluincidujúcim dvojiciam $(u, \vartheta_1), (u, \vartheta_2), \ldots, (u, \vartheta_d)$, kde $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_d$ sú steny G. Zrejme $|V'| = d \cdot |V|$.

Tak ako v predošlom prípade skonštruujeme zafarbenie ϕ pre G'. Ak bol v grafe G vrchol $u \in V$ zafarbený farbou $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, tak na zafarbenie vrcholov $v_{1_u}, v_{2_u}, \ldots, v_{d_u} \in V'$, ktoré v grafe G zodpovedajú spoluincidujúcim dvojiciam príslušným vrcholu u, použijeme farby $\{(j-1)d + 1,\ (j-1)d + 2, \ldots, jd\}$, na každý vrchol inú farbu. Najvyššia použitá farba bude $k \cdot d = \chi_{sr}(G) \cdot d$.

Overíme, že toto zafarbenie spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia. Každému vrcholu $u \in V$ zodpovedá jedna stena $\vartheta' \in F(G')$ stupňa d taká, že vrcholy s touto stenou incidujúce zodpovedajú spoluincidujúcim dvojiciam (u, ϑ_i), pre $\vartheta_i \in F(G)$, $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Tieto vrcholy majú každý inú farbu. Teda steny zodpovedajúce vrcholom z $V(G)$ spĺňajú podmienku stenového rankingového zafarbenia triviálne.

Nech $e = \{u_1, u_2\} \in E(G)$ a $\vartheta_1, \vartheta_2 \in F(G)$ sú susedné steny incidentné s touto hranou e. Koncom tejto hrany zodpovedajú spoluincidujúce dvojice (u_1, ϑ_1), (u_1, ϑ_2), (u_2, ϑ_1), (u_2, ϑ_2). Týmto spoluincidujúcim dvojiciam v G' odpovedajú vrcholy $v'_{1,1}$, $v'_{1,2}$, $v'_{2,1}$, $v'_{2,2}$. Z β-transformácie dostávame, že $[v'_{1,1}, v'_{1,2}, v'_{2,1}, v'_{2,2}]$ je v G' stena stupňa 4. V G boli vrcholy u_1 a u_2 zafarbené rôznymi farbami lebo sú susedné. Preto teda aj vrcholy $v'_{1,1}$, $v'_{1,2}$, $v'_{2,1}$, $v'_{2,2}$ podľa definície ϕ sú zafarbené rôznymi farbami.

Nech $V(\vartheta)$ je množina vrcholov incidentných so stenou $\vartheta \in F(G)$. Každý $u \in V(\vartheta)$ tvorí s touto stenou práve jednu spoluincidujúcu dvojicu. Vrcholy zodpovedajúce týmto dvojiciam tvoria stenu $\vartheta' \in F(G')$. Z každej steny $\vartheta \in F(G)$ vznikne stena $\vartheta' \in F(G')$ rovnakého supňa.

Vezmime ľubovoľnú stenovú cestu $P' = [v'_1, v'_2, \ldots, v'_p]$ grafu G'. Pretože pre $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ vrcholy v'_j vznikli zo spoluincidujúcich dvojíc (u_j, ϑ), tak ceste P' na stene ϑ pôvodného grafu G zodpovedá cesta $P = [u_1, u_2, \ldots, u_p]$. Ak sa na ceste P' nachádzajú dva vrcholy v', w' rovnakej farby, znamená to, že v pôvodnom grafe sú im zodpovedajúce vrcholy rovnakej farby. Pôvodný graf sme mali rankingovo zafarbený, preto je na ceste P medzi tými dvoma vrcholmi nejaký vrchol x zafarbený vyššou farbou. Tento vrchol zodpovedá nejakému vrcholu x', ktorý je na ceste P' medzi v' a w', preto tento vrchol, podľa toho ako sme navrhli zafarbenie, má farbu vyššiu ako vrcholy v', w'. $\square$

Lema nám pomôže určiť horný odhad pre niektoré triedy grafov. Táto hranica sa pre konkrétny graf z danej triedy môže dať individuálne zlepšiť. Pre horné ohraničenie stenového rankingového čísla grafu G' z takejto triedy môžeme zvoliť menšie z čísel $(2 + \Delta^*)$ a $(d \cdot \chi_{sr}(G))$, kde Δ^* je maximálny stenový stupeň a d je stupeň vrcholov zo znenia predošlej Lemy. Namiesto d-regulárneho grafu G so známym $\chi_{sr}(G)$ môžeme uvažovať namiesto d maximálny stupeň vrcholov $\Delta(G)$. Môže sa však stať, že uvažujeme zbytočne veľa farieb.

Lema 3.6. *Nech $G = \{V, E, F\}$ je rovinný graf a nech poznáme jeho chromatické číslo $\chi_0(G)$ a aj stenové rankingové číslo $\chi_{sr}(G) = k$. Nech rovinný graf $G' = \gamma(G)$ vznikol z G γ-transformáciou. Potom platí: $\chi_{sr}(G') \leq \chi_{sr}(G) + \chi_0(G)$.*

Dôkaz. Z vety o 4 farbách vieme, že $\chi_0(G) \leq 4$. Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}$ je stenové rankingové zafarbenie grafu G pomocou k farieb a $\mathfrak{c}$ regulárne zafarbenie grafu G (najviac však 4 farbami). Pomocou týchto zafarbení zostrojíme zafarbenie ϕ grafu G'.

Ak $v' \in V(G') \setminus V(G)$, teda v' zodpovedá nejakej spoluicidujúcej dvojici (v, ϑ), kde v je vrchol a ϑ je stena grafu G, tak $\phi(v') := \mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v)$.

Ak $v' \in V(G') \cap V(G)$, tak v zafarbení grafu G' položíme $\phi(v) := \mathfrak{c}(v) + k$. Susedné vrcholy pôvodného grafu G incidujú v G' iba so 6-uholníkovými stenami, pričom v grafe G' sú nesusedné a nemajú ani navzájom spoločných susedov. Pretože v takejto 6-uholníkovej stene majú vrcholy z pôvodného grafu rôzne farby a vyššie ako ostatné štyri vrcholy tejto steny, sú podmienky pre stenové rankingové zafarbenie splnené. Ostatné steny grafu G' prebrali zafarbenie grafu G, preto tiež spĺňajú podmienky stenového rankingového zafarbenia. $\square$

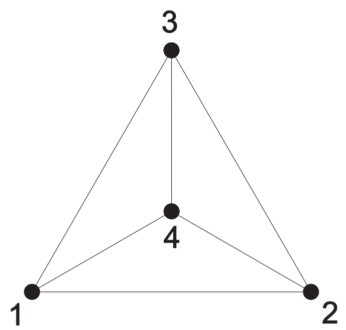
4 Grafy Platónskych mnohostenov a ich stenové rankingové zafarbenie

Platónske grafy sú také 3-súvislé rovinné grafy, ktorých každý vrchol má ten istý stupeň a aj každá stena má ten istý stupeň. Do množiny platónskych grafov patrí 5 grafov. Sú to grafy:

1. štvorstena (alebo ekvivalentne tetraédra, t.j. graf (3,3,3)-mnohostena),
2. osemstena (oktaédra, t.j. graf (3,3,3,3)-mnohostena),
3. dvadsaťstena (ikosaédra, t.j. graf (3,3,3,3,3)-mnohostena),
4. kocky (hexaédra, t.j. graf (4,4,4)-mnohostena),
5. dvanásťstena (dodekaédra, t.j. graf (5,5,5)-mnohostena).

4.1 Štvorsten

Štvorsten je úplný graf zo štyroch vrcholov, tak je zrejmé, že každý vrchol musí mať inú farbu. (Pozri *Obrázok 4.*)



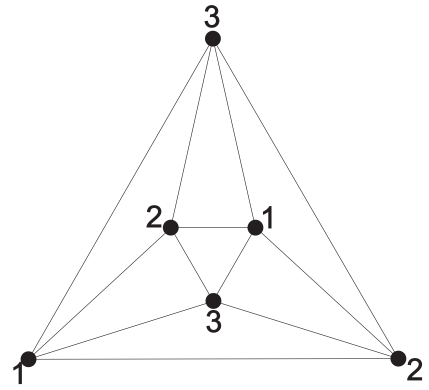
Obr. 4: Graf štvorstena, stenové rankingové zafarbennie 4 farbami

Veta 4.1. *Stenové rankingové číslo štvorstena je 4.*

Dôkaz. Medzi každými dvoma vrcholmi grafu štvorstena existuje stenová cesta zodpovedajúca práve jednej hrane. Preto žiadne dva vrcholy nemôžu mať rovnakú farbu. Graf štvorstena je navyše úplný graf, preto jeho stenové rankingové číslo je 4. □

4.2 Osemsten

Graf osemstena pozostáva z ôsmich stien stupňa 3 a šiestich vrcholov stupňa 4. Definujeme ho jednoducho pomocou jeho vrcholovej a hranovej množiny. $V = \{a, b, c, a', b', c'\}$, $E = \{\{x, y\}; x \in \{a, b, c\}, y \in V \setminus \{x'\}\}$.



Obr. 5: Graf osemstena, stenové rankingové zafarbennie 3 farbami

Veta 4.2. *Stenové rankingové číslo osemstena je 3.*

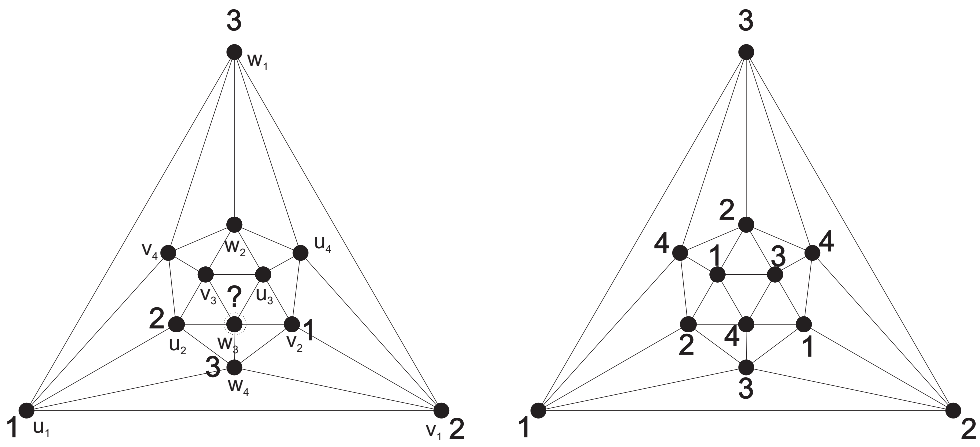
Dôkaz. Kedže steny sú trojuholníky, nutne potrebujeme aspoň tri farby. Ak vezmeme zafarbenie $\phi(x) = \phi(x')$; $x \in \{a, b, c\}$ také, že vrcholom a, b, c dáme rôzne farby, tak máme pre osemsten stenové rankingové zafarbenie 3 farbami, tak ako to vidieť na *Obrázku 5.* $\square$

4.3 Dvadsaťsten

Graf dvadsaťstena pozostáva z dvadsiatich stien stupňa 3 a dvanástich vrcholov stupňa 5.

Veta 4.3. *Stenové rankingové číslo dvadsaťstena je 4.*

Dôkaz. Ľahko vidieť, že dvadsaťsten nie je možné zafarbiť tromi farbami. Použijeme označenie vrcholov z *Obrázka 6 vľavo.* Predpokladajme, že tento graf sa dá zafarbiť tromi farbami. Graf je symetrický, tak BUNV vrcholy vonkajšej trojuholníkovej steny majú nasledujúce farby: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_1) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_1) = 3$. Potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_4) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_2) = 1$. Dostali sme sa k tomu, že vrchol w_3 susedí s tromi vrcholmi rôznej farby a je nutné použiť štvrtú farbu.

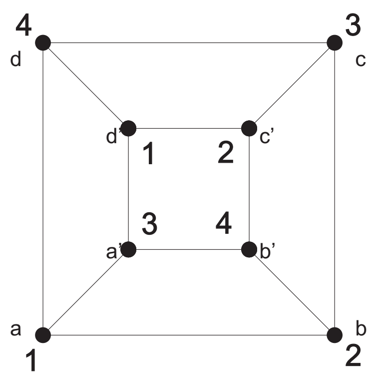


Obr. 6: Graf dvadsaťstena, stenové rankingové zafarbennie 4 farbami

Tiež je jednoduché ukázať zafarbenie štyrmi farbami ako to vidieť napríklad na *Obrázku 6 vpravo*. Stačí vrcholom priradiť farby nasledovne: $\phi(u_1) = 1$, $\phi(u_2) = 2$, $\phi(u_3) = 3$, $\phi(u_4) = 4$ $\phi(v_1) = 2$, $\phi(v_2) = 1$, $\phi(v_3) = 1$, $\phi(v_4) = 4$, $\phi(w_1) = 3$, $\phi(w_2) = 2$, $\phi(w_3) = 4$, $\phi(w_4) = 3$. $\square$

4.4 Kocka

Graf kocky obsahuje šesť 4-uholníkových stien a osem vrcholov stupňa 3. Množinu vrcholov kocky označme $V = \{a, b, c, d, a', b', c', d'\}$. Vzhľadom na V je definovaná množina hrán $E = \big\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{a', b'\}, \{b', c'\}, \{c', d'\}, \{d', a'\}, \{a, a'\}, \{b, b'\}, \{c, c'\}, \{d, d'\}\big\}$.



Obr. 7: Graf kocky, stenové rankingové zafarbenie 4 farbami

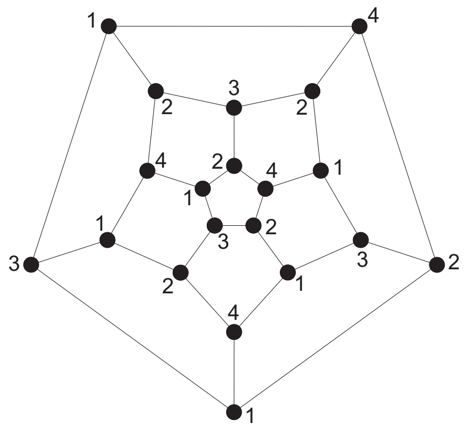
Veta 4.4. *Stenové rankingové číslo kocky je 4.*

Dôkaz. Kocka sa dá zafarbiť stenovým rankingovým zafarbením pomocou štyroch farieb tak, ako to je na *Obrázku 7*. Vyjadruje to nasledujúce zobrazenie ϕ, kde $\phi(a) = 1$, $\phi(b) = 2$, $\phi(c) = 3$, $\phi(d) = 4$, $\phi(a') = 3$, $\phi(b') = 4$, $\phi(c') = 2$, $\phi(d') = 1$.

Teraz ukážeme, že graf kocky nie je možné stenovo rankingovo zafarbiť tromi farbami. BUNV nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(a) = 1$. potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(b) \neq \mathfrak{r}_\mathfrak{s}(c)$. Tak nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(b) = 2$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(c) = 3$. Nemôže byť b' zafarbené farbou 3, lebo by sme nevedeli zafarbiť a', tak b' nech má farbu 1. Potom nutne a' je 3, ale to nie je možné kôli stene $[a, a', d, d']$. □

4.5 Dvanásťsten

Graf dvanásťstena obsahuje dvanásť 5-uholníkových stien a dvadsať vrcholov stupňa 3.



Obr. 8: Graf dvanásťstena, stenové rankingové zafarbenie 4 farbami

Veta 4.5. *Stenové rankingové číslo dvanásťstena je 4.*

Dôkaz. Pretože steny sú päťuholníky a obsahujú stenovú kružnicu dĺžky 5, tak podľa *Lemy 2.4* je na zafarbenie dvanásťstena potrebé použiť minimálne 4 farby.

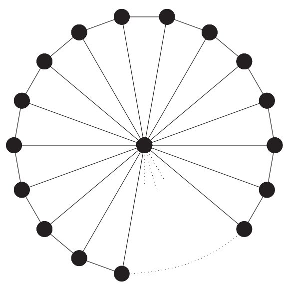
Stenové rankingové zafarbenie štyrmi farbami dvanásťstena zostrojíme ako na *Obrázku 8*. □

5 Stenové rankingové zafarbenie zovšeobecnení Platónskych grafov

Zovšeobecnenia grafov Platónskych mnohostenov môžeme dosiahnúť zafixovaním dvoch vhodných vrcholov a popridávaním stien alebo aj zafixovaním dvoch vhodných stien a popridávaním stien, prípadne zafixovaním neincidentnej kombinácie vrchol stena. Vzniknuté grafy ostávajú rovinné.

5.1 Zovšeobecnený štvorsten

Z grafu štvorstena dostaneme nové grafy tak, že fixujeme (stredový) vrchol a (vonkajšiu) kružnicu (tá neinciduje s vybraným vrcholom). Na kružnicu zobrazíme $n > 2$ vrcholov a pospájame ich so stredovým vrcholom. Vznikne graf n-bokej pyramídy, v ktorom je uprostred vrchol stupňa n. Ostatné vrcholy sú stupňa tri. Steny vnútri grafu sú stupňa tri, vonkajšia stena je stupňa n. Graf, ktorý vznikne takýmto zovšeobecnením označíme R_n. Platí nasledujúce tvrdenie.



Obr. 9: Graf zovšeobcnenia štvorstena

Veta 5.1. *Nech pre $n > 2$ je R_n graf n-bokej pyramídy. Potom platí:*

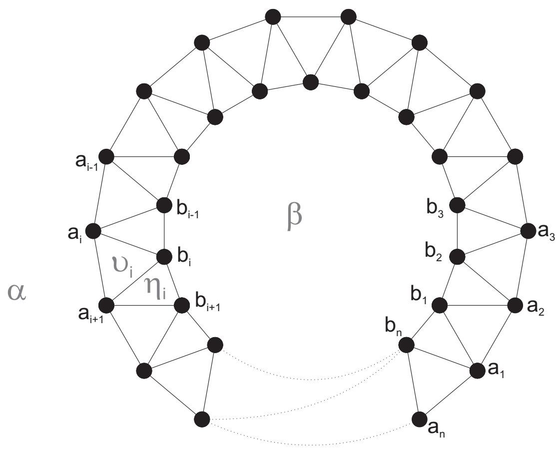
$$\chi_{sr}(R_n) = 2 + \lceil \log_2 n \rceil.$$

Dôkaz. Graf R_n obsahuje stenovú kružnicu dĺžky n. Podľa *Lemy 2.4* na jej zafarbenie potrebujeme $f = 1 + \lceil \log_2 n \rceil$ farieb. Stredový vrchol stupňa n nemôže byť zafarbený žiadnou z farieb $\{1, 2, \ldots, f\}$, lebo susedí s vrcholmi týchto farieb. Stačí, aby bol tento vrchol zafarbený vyššou farbou ako f a bude tento graf spĺňať podmienky stenového rankingového zafarbenia. $\square$

5.2 Zovšeobecnený osemsten - Antiprizma

Zafixovaním dvoch nesusedných stien osemstena získame zovšeobecnením graf antiprizmy.

Označme n-bokú antiprizmu A_n $(3,3,3,n)$-mnohosten, $n \geq 3$, ktorá je definovaná nasledovne: Graf pozostáva z množiny vrcholov $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots, b_n\}$ a množiny hrán $E = \{\{a_i, a_{i+1}\} \cup \{b_i, b_{i+1}\} \cup \{a_i, b_i\} \cup \{a_i, b_{i-1}\}, i = 1, \ldots, n$ (indexy sú počítané modulo n). Množinu stien A_n tvoria dve n-uholníkové steny $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$ a $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$ a $2n$ 3-uholníkových stien.



Obr. 10: Graf antiprizmy

Veta 5.2. *Nech A_n je n-boká antiprizma, $n \geq 3$. Potom platí:*

$$1 + \lceil \log_2 n \rceil \leq \chi_{sr}(A_n) \leq 4 + \lceil \log_2(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1) \rceil.$$

Dôkaz. Pre $n = 3$ je A_3 graf osemstena, ten už máme popísaný v predošlej časti.

Dolná hranica stenového rankingového zafarbenia pre A_n, $n > 3$, je podľa *Lemy 2.4* zrejma z toho, že graf obsahuje stenovú kružnicu dĺžky n.

Na ukáznie hornej hranice skonštruujeme zafarbenie ϕ pomocou k farieb. Označme $p = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ a nech $k = 4 + \lceil \log_2(p + 1) \rceil$. Ako pomôcku použijeme rankingové zafarbenie grafu cesty $P_1 = [u_1, u_2, \ldots, u_p]$, pričom P_1 je nejaká ľubovoľná p-vrcholová cesta. Na zafarbenie cesty P_1 podľa *Lemy 2.2* potrebujeme $f = \lceil \log_2(p + 1) \rceil$ farieb. Zrejme $k = f + 4$. Nech φ je rankingové zafarbenie cesty P_1 pomocou f farieb. Zobrazenie ϕ definujeme nasledovne:

1. $\phi(a_n) = \phi(b_1) = k$

2. $\phi(a_i) = \phi(b_{i+1}) = h$, ak $i \equiv h \pmod 4$, pre $h \in \{1, 2, 3\}$

3. $\phi(a_{4j}) = \phi(b_{4j+1}) = 3 + \varphi(u_i)$, pre $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$

Teda vrcholy a_{4j}, b_{4j+1}, $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ sú zafarbené tak, ako keby boli vrcholmi cesty P_1, pričom sú použité farby z množiny $\{4, 5, \ldots, (f+3)\}$. Farba k má byť najvyššia použitá farba. Chceme aby $3 + f < k$. To platí, lebo $k = f + 4$.

Ukážeme ešte, že k farieb je aspoň toľko ako je dolná hranica.
$k = 4 + \lceil \log_2 \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \rceil \geq 4 + \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{4} \rceil \rceil \geq 4 + \log_2 \frac{n}{4} \geq \log_2 16 + (\log_2 n - \log_2 4) =$
$= \log_2 \frac{16}{4} + \log_2 n \geq \log_2 4 + \log_2 n \geq 1 + \log_2 n$

Potrebujeme teraz ukázať, že zafarbenie ϕ spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia.
Steny α a β majú zafarbené vrcholy rovnakou postupnosťou farieb $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $c_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, len s posunutím presne o dva vrcholy. Uvažujme teda stenu α. Ak stenová cesta steny α obsahuje vrchol a_n, ktorý nie je jej koncovým vrcholom, tak spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia, lebo $\phi(a_n) = k$ je najvyššia použitá farba a na vrcholoch tejto steny iba raz. Vezmime teda nejakú stenovú cestu $P = [a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j]$ steny α, kde $1 \leq i < j \leq n$, ktorá neobsahuje vrchol a_n. Nech a_m, a_t sú vrcholy na tejto ceste P také, že sú zafarbené rovnakou farbou $c \in \{1, 2, \ldots, (k-1)\}$.

Nech $c \in \{1, 2, 3\}$. Potom existuje vrchol $a_{5 \cdot s}$ medzi vrcholmi a_m, a_t taký, že

$$c \leq 3 < 3 + \varphi(u_s) = \phi(a_{4 \cdot s}).$$

Nech $3 < c < k$. Potom je $m \equiv t \equiv 0 \pmod 4$. Teda existujú $m', t' \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{4} \rfloor\}$, že $m = 4 \cdot m'$ a $t = 4 \cdot t'$, pričom $c = \phi(a_m) = \phi(a_t)$, ale tiež $c = 3 + \varphi(u_{m'}) = 3 + \varphi(u_{t'})$. Vrcholy $u_{m'}, u_{t'}$ sú vrcholy cesty P_1, ktorá je rankingovo zafarbená, preto medzi nimi existuje vrchol $u_{s'}$ taký, že platí:

$$m' < s' < t',$$

$$\varphi(u_{m'}) = \varphi(u_{t'}) < \varphi(u_{s'}).$$

Vzhľadom k tomu ako sme vytvorili zafarbenie ϕ pre graf A_n, existuje vrchol $a_{4 \cdot s'}$ na ceste P medzi vrcholmi a_m, a_t taký, že platí:

$$\phi(a_{4 \cdot s'}) = 3 + \varphi(u_{s'}) > 3 + \varphi(u_{m'}) = 3 + \varphi(u_{t'}) = c.$$

Podmienky stenového rankingového zafarbenia spĺňajú ľubovoľné dva vrcholy rovnakej farby na tej istej stenovej ceste a tiež stenové rankingové zafarbenie je splnené pre nejakú ľubovoľnú stenovú cestu P steny α. Preto každá stenová cesta steny α spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia.

Na stene β je situácia rovnaká až na posunutie indexov, presnejšie vrcholy zodpovedajúcej si farby zo steny α a β sú viazané vzťahom $\phi(b_i) = \phi(a_{i-1})$ (indexy sú počítané modulo n), potrebujeme pre všetky vrcholy $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zo steny β.

Ďalej graf A_n obsahuje ešte 3-uholníkové steny. Tie sú všetky zafarbené tak, že vrcholy incidentné so stenou stupňa 3 sú každý inej farby. Keby to tak nebolo, tak na nejakej 3-uholníkovej stene $\vartheta_i = [a_i, a_{i+1}, b_i]$ alebo na stene $\eta_i = [b_i, b_{i+1}, a_{i+1}]$, pre nejaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (i+1 je vzhľadom na modulo n) sú aspoň dva vrcholy rovnakej farby. Nemohlo však nastať, že $\phi(a_i) = \phi(a_{i+1})$ alebo $\phi(b_i) = \phi(b_{i+1})$ lebo na stenových kružniciach stien α a β sa farby vrcholov striedajú. Nemohlo nastať ani to, že $\phi(a_i) = \phi(b_i)$ a ani $\phi(a_{i+1}) = \phi(b_i)$, lebo platí $\phi(a_i) = \phi(b_{i+1})$ pričom vrcholy b_i, b_{i+1} sú susedné na stenovej kružnici steny β a farba $\phi(b_{i+1})$ sa zopakuje minimálne až o štyri (alebo viac) vrcholov ďalej na stenovej ceste steny β. Platí tiež $\phi(a_{i+1}) \neq \phi(b_i)$ a $\phi(a_{i+1}) \neq \phi(b_{i+1})$, lebo $\phi(b_{i+1}) = \phi(a_i)$ (indexy sú počítané modulo n) a na stenovej ceste steny α sa farba $\phi(a_i)$ zopakuje najskôr minimálne o štyri vrcholy ďalej ako vrchol a_i. Platí teda že každá 3-uholníková stena ϑ_i resp. η_i, pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, inciduje iba s vrcholmi troch rôznych farieb.

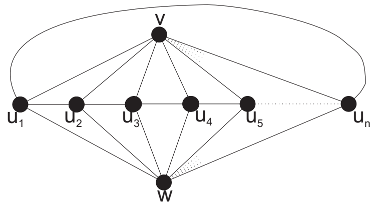
□

5.3 Iné zovšeobecnenie osemstena

Iné zovšeobecnenie dosiahneme tak, že z grafu osemstena ponecháme dva nesusedné vrcholy. Fixovaním nesusedných vrcholov v, w, ktoré ležia jeden na vonkajšej kružnici a druhý na vnútornej kružnici grafu osemstena, pridaním po n stien ku zafixovaným vrcholom tak, že každá stena incidentná s vrcholom v susedí práve s jednou stenou incidentnou s vrcholom w, dostaneme graf, ktorý nazývame n-boká bipyramída. Označíme ho B_n. Takto vzniknutý graf má n vrcholov stupňa štyri, dva vrcholy stupňa n a $2n$ stien stupňa tri.

Veta 5.3. *Nech B_n pre $n > 2$ je graf bipyramídy. Potom platí:*

$$3 \leq \chi_{sr}(B_n) = \chi_0(B_n) \leq 4.$$

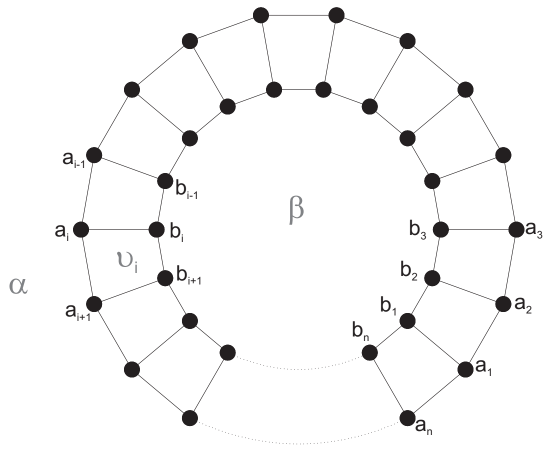


Obr. 11: Graf zovšeobecnenia osemstena

Dôkaz. Keďže B_n je triangulácia, tak podľa *Vety 3.2* pre jeho stenové rankingové číslo platí: $\chi_{sr}(B_n) = \chi_0(B_n)$. Vieme, že pre trianguláciu existuje regulárne zafarbenie tromi alebo štyrmi farbami. □

5.4 Zovšeobecnená kocka - Prizma

Zafixovaním dvoch nesusedných stien kocky získame zovšeobecnením graf prizmy. Označme graf n-bokej prizmy D_n, ktorá je pre $n \geq 3$ pravidelný graf $(4, 4, n)$-mnohostena. Tento graf pozostáva z množiny vrcholov $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots, b_n\}$ a množiny hrán $E = \pmb{\{}\{a_i, a_{i+1}\}, i \in \mathcal{I} \pmb{\}} \cup \pmb{\{}\{b_i, b_{i+1}\}, i \in \mathcal{I} \pmb{\}} \cup \cup \pmb{\{}\{a_i, b_i\}, i \in \mathcal{I} \pmb{\}}$, kde $\mathcal{I} = \{1, \ldots, n\}$ (indexy počítame podľa modulu n). Množinu stien D_n tvoria dve n-uholníkové steny $\alpha = [a_1, \ldots, a_n]$, $\beta = [b_1, \ldots, b_n]$ a n 4-uholníkových stien $[a_i, a_{i+1},\ b_{i+1}, b_i]$, pre $i = 1, 2, \ldots, n$ (indexy sú brané vzhľadom k modulo n).



Obr. 12: Graf prizmy

Veta 5.4. *Nech D_3 je 3-boká prizma. Potom platí:* $\chi_{sr}(D_3) = 5$.

Dôkaz. Nech $\mathfrak{r_s}$ je stenové rankingové zafarbenie D_3. Keby $\chi_{sr}(D_3) = 3$, tak BUNV $\mathfrak{r_s}(a_1) = 1$, $\mathfrak{r_s}(a_2) = 2$, $\mathfrak{r_s}(a_3) = 3$. Potom na stene $[a_2, a_3, b_3, b_2]$ vrchol b_2 nemôže byť farby 2 a ani 3, nutne $\mathfrak{r_s}(b_2) = 1$. Potom však vrchol b_3 nemôže byť žiadnej z farieb 1, 2, 3.

Keby $\chi_{sr}(D_3) = 4$, tak BUNV $\mathfrak{r_s}(a_1) = 1$. Kôli farbe vrcholu a_1 konce stenových ciest $[a_2, a_1, a_3]$, $[a_2, a_1, b_1]$, $[a_3, a_1, b_1]$ nemôžu byť rovnakej farby. Teda $\mathfrak{r_s}(a_2) \neq \mathfrak{r_s}(a_3)$, $\mathfrak{r_s}(a_2) \neq \mathfrak{r_s}(b_1)$ a $\mathfrak{r_s}(b_1) \neq \mathfrak{r_s}(a_3)$. Preto každý z vrcholov a_2, a_3, b_1 musí byť inej farby, pričom sa použijú práve farby 2, 3 a 4. Nech $\{k, l, m\} = \{2, 3, 4\}$ a $k < l$. Nech $\mathfrak{r_s}(a_2) = k$, $\mathfrak{r_s}(a_3) = l$, $\mathfrak{r_s}(b_1) = m$. Pretože vrchol b_1 susedí s vrcholmi a_1, b_1 nemôže byť farby k ani m. Kôli stenovej ceste $[b_2, a_2, a_3]$ a kôli predpokladu $k < l$ nemôže byť ani farby l. Teda nech $\mathfrak{r_s}(b_2) = 1$. Vrchol b_3 susedí s vrcholmi b_1, b_2, a_3 a leží na stenovej ceste $[a_2, b_2, b_3]$, preto nemôže byť zafarbený žiadnou z farieb 1, 2, 3, 4.

Ak za stenové rankingové zafarbenie zoberieme napríklad ϕ, kde $\phi(a_1) = 1$, $\phi(a_2) = 2$, $\phi(a_3) = 3$, $\phi(b_1) = 4$, $\phi(b_2) = 1$, $\phi(b_3) = 5$, tak máme ukázané, že $\chi_{sr}(D_3) = 5$.

□

Pre $n = 4$ je D_4 graf kocky, ktorého stenové rankingové číslo je uvedené v časti o grafoch Platónskych mnohostenov. Pre $n \geq 5$ platí nasledujúca veta.

Veta 5.5. *Nech D_n je n-boká prizma, $n \geq 5$. Potom platí:*

$$1 + \lceil \log_2 n \rceil \leq \chi_{sr}(D_n) \leq 5 + \lceil \log_2(\lfloor \tfrac{n}{5} \rfloor + 1) \rceil$$

Dôkaz. Dolná hranica je zrejma z toho, že graf D_n obsahuje stenovú kružnicu dĺžky n. Podľa *Lemy 2.4* vieme kružnicu dĺžky n zafarbiť rankingovo $1 + \lceil \log_2 n \rceil$ farbami.

Na ukáznie hornej hranice skonštruujeme zafarbenie ϕ pomocou k farieb. Označme $p = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ a nech $k = 5 + \lceil \log_2(p + 1) \rceil$. Ako pomôcku použijeme rankingové zafarbenie grafu cesty $P_1 = [u_1, u_2, \ldots, u_p]$, pričom P_1 je nejaká ľubovoľná p-vrcholová cesta. Na zafarbenie cesty P_1 podľa *Lemy 2.2* potrebujeme $f = \lceil \log_2(p + 1) \rceil$ farieb. Zrejme $k = f + 5$. Nech φ je rankingové zafarbenie cesty P_1 pomocou f farieb. Zobrazenie ϕ definujeme nasledovne:

1. $\phi(a_n) = \phi(b_2) = k$

2. $\phi(a_i) = \phi(b_{i+2}) = h$, ak $i \equiv h \pmod 5$, pre $h \in \{1, 2, 3, 4\}$

3. $\phi(a_{5j}) = \phi(b_{5j+2}) = 4 + \varphi(u_i)$, pre $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$

Chceme aby $4+f < k$. Vzhľadom k tomu, že $k = f+5$ to je v poriadku. Ukážeme ešte, že počet použitých farieb k je aspoň toľko, ako je dolná hranica počtu farieb nutne potrebných. (Chceme teda aby $k \geq 1 + \lceil \log_2 n \rceil$.)
$k = 5 + \lceil \log_2 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1 \rceil \geq 5 + \lceil \log_2 \lceil \frac{n}{5} \rceil \rceil \geq \log_2 32 + \log_2 \frac{n}{5} \geq \log_2 32 + (\log_2 n - \log_2 5) =$
$= \log_2 \frac{32}{5} + \log_2 n \geq \log_2 6 + \log_2 n \geq 1 + \log_2 n$

Potrebujeme teraz ukázať, že toto zafarbenie ϕ spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia. Steny α a β majú zafarbené vrcholy rovnakou postupnosťou farieb $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $c_i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, len s posunutím presne o dva vrcholy. Uvažujme teda stenu α. Ak stenová cesta steny α obsahuje vrchol a_n, ktorý nie je jej koncovým vrcholom, tak spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia, lebo $\phi(a_n) = k$ je najvyššia použitá farba a na vrcholoch tejto steny iba raz. Ak sú na takejto ceste dva vrcholy zafarbené rovnakou farbou a vrchol a_n sa nenachádza medzi nimi, zoberie sa kratšia cesta bez vrchola a_n, od ktorej sa žiada tá istá podmienka. Vezmime teda nejakú stenovú cestu $P = [a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j]$ steny α, kde $1 \leq i < j \leq n$. Nech a_m, a_t sú vrcholy na ceste P také, že sú zafarbené rovnakou farbou $c \in \{1, 2, \ldots, (k-1)\}$.

Nech $c \in \{1, 2, 3, 4\}$, potom existuje vrchol $a_{5 \cdot s}$ medzi vrcholmi a_m, a_t taký, že platí:

$$c \leq 4 < 4 + \varphi(u_s) = \phi(a_{5 \cdot s}).$$

Nech $4 < c < k$, pričom je $m \equiv t \equiv 0 \pmod 5$. Teda existujú $m', t' \in \{1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{5} \rfloor\}$ také, že $m = 5 \cdot m'$ a $t = 5 \cdot t'$, kde $c = \phi(a_m) = \phi(a_t)$, ale tiež $c = 4 + \varphi(u_{m'}) = 4 + \varphi(u_{t'})$. Vrcholy $u_{m'}, u_{t'}$ sú vrcholy cesty, ktorá je rankingovo zafarbená, preto medzi nimi existuje vrchol $u_{s'}$ $m' < s' < t'$ taký, že platí:

$$\varphi(u_{m'}) = \varphi(u_{t'}) < \varphi(u_{s'}).$$

Vzhľadom k tomu ako sme vytvorili zafarbenie ϕ pre graf D_n, existuje vrchol $a_{5 \cdot s'}$ na ceste P medzi vrcholmi a_m, a_t taký, že platí:

$$\phi(a_{5 \cdot s'}) = 4 + \varphi(u_{s'}) > 4 + \varphi(u_{m'}) = 4 + \varphi(u_{t'}) = c.$$

Podmienky stenového rankingového zafarbenia spĺňajú ľubovoľné dva vrcholy rovnakej farby na tej istej stenovej ceste a tiež stenové rankingové zafarbenie je splnené pre nejakú ľubovoľnú stenovú cestu P steny α. Preto každá stenová cesta steny α spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia.

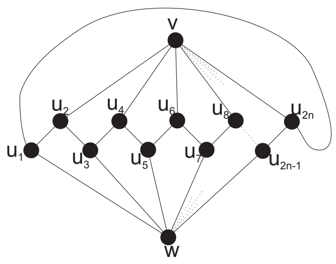
Na stene β je situácia rovnaká (až na posunutie indexov), presnejšie vrcholy sú zafarbené nasledovne: $\phi(b_i) = \phi(a_{i-2})$ (indexy sú počítané modulo n), kde vrcholy $b_1, b_2, \ldots, b_n$ prislúchajú stene β.

Graf D_n obsahuje ešte 4-uholníkove steny. Preto ešte ukážeme, že všetky 4-uholníkové steny sú zafarbené tak, aby každý vrchol incidentný so stenou stupňa 4 mal každý inú farbu. Keby to tak nebolo, uvažujme 4-uholníkovú stenu $\vartheta_i = [a_i, a_{i+1}, b_{i+1}, b_i]$, pre nejaké $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (indexy sú počítané modulo n) a nech ϑ_i je taká stena, že inciduje aspoň s dvoma vrcholmi rovnakej farby. Nemohlo však nastať, že $\phi(a_i) = \phi(a_{i+1})$ alebo $\phi(b_i) = \phi(b_{i+1})$ lebo na stenových kružniciach stien α a β sa farby vrcholov striedajú. Nemohlo nastať ani, že $\phi(a_i) = \phi(b_i)$ a ani $\phi(a_i) = \phi(b_{i+1})$, lebo platí $\phi(a_i) = \phi(b_{i+2})$ a vrcholy b_i, b_{i+1}, b_{i+2} sú susedné na stenovej kružnici steny β, pričom farba $\phi(b_{i+2})$ sa zopakuje minimálne až o päť (alebo viac) vrcholov ďalej na stenovej ceste steny β. Platí tiež $\phi(a_{i+1}) \neq \phi(b_i)$ a $\phi(a_{i+1}) \neq \phi(b_{i+1})$, lebo $\phi(b_{i+1}) = \phi(a_{i-1})$ (indexy sú počítané modulo n) a na stenovej ceste steny α sa farba $\phi(a_{i-1})$ zopakuje najskôr minimálne o päť vrcholov ďalej ako vrchol a_{i-1}. Neexistuje 4-uholníková stena, ktorá by mala aspoň dva vrcholy zafarbené rovnako. Teda pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ stena ϑ_i inciduje iba s vrcholmi štyroch rôznych farieb.

□

5.5 Iné zovšeobecnenie kocky

Iné zovšeobecnenie pre kocku dosiahneme tak, že z grafu kocky ponecháme dva vrcholy. Oba vrcholy budú incidovať s $n \geq 3$ stenami stupňa štyri. Toto zovšeobecnenie jednoducho skonštruujeme tak, že utvoríme kružnicu dĺžky $2n$. Vrcholy na kružnici označíme $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{2n}$. Umiestníme jeden vrchol v do vnúra kružnice, pospájame ho s vrcholmi $u_{2i}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ z kružnice a druhý vrchol w umiestníme do vonkajška kružnice, ktorý pospájame s vrcholmi $u_{2i-1}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ kružnice. Vznikne tak graf, ktorý je párny, obsahuje dva vrcholy stupňa n a ostatné vrcholy stupňa 3. Takto vzniknutý graf označujeme D'_n.



Obr. 13: Graf zovšeobecnenia kocky

Veta 5.6. *Nech graf D'_n, pre $n \geq 2$ je zovšeobecnením kocky, potom $\chi_{sr}(D'_n) = 4$.*

Dôkaz. Pre $n = 3$ je to graf kocky, tento prípad je rozobratý vyššie. Podľa *Lemy 2.4* na zafarbenie stenovej kružnice dĺžky 4 potrebujeme minimálne tri farby. Jediná možnosť ako ju zafarbiť je vyjadrená farebnou postupnosťou $(1, 2, 1, 3)$. Ukážeme najskôr, že pre $n \geq 2$ neexistuje stenové rankingové zafarbenie grafu D'_n tromi farbami.

Pre $n = 2$ máme graf $D'_2 = (V_2, E_2, F_2)$, kde $V_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v, w\}$, $E_2 = \boldsymbol{\{}\{u_1, u_2, \}\ \{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}, \{u_4, u_1\}, \{v, u_2\}, \{v, u_4\}, \{w, u_1\}, \{w, u_3\}\boldsymbol{\}}$ a $F_2 = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2\}$, pričom $\alpha'_1 = [u_1, u_2, v, u_4]$, $\alpha'_2 = [v, u_2, u_3, u_4]$, $\beta'_1 = [u_1, u_2, u_3, w]$, $\beta'_2 = [u_1, w, u_3, u_4]$. Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}$ je stenové rankingové zafarbenie D'_2 tromi farbami. Existjú tri možnosti zafarbenia vrcholu w.

Prípad 1: Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w) = 1$. Potom na stenovej kružnici $[u_1, u_2, u_3, w]$ BUNV platí, že $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 1$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 3$. Kôli stenovým cestám $[v, u_2]$, $[v, u_2, u_1]$, $[v, u_2, u_3]$ nemôže byť vrchol v zafafarbený žiadnou z troch farieb 1,2,3.

Prípad 2: Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w) = 2$. Potom na stenovej kružnici $[u_1, u_2, u_3, w]$ už musí platiť, že $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 3$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 1$. Kôli stenovým cestám $[u_4, u_3]$, $[u_4, u_3, w]$, $[u_4, u_3, u_2]$ nemôže byť vrchol u_4 zafafarbený žiadnou z troch farieb 1,2,3.

Prípad 3: Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w) = 3$. Potom na stenovej kružnici $[u_1, u_2, u_3, w]$ už musí platiť, že $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 2$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 1$. Kôli stenovým cestám $[u_4, u_3]$, $[u_4, u_3, w]$, $[u_4, u_3, u_2]$ nemôže byť vrchol u_4 zafarbený žiadnou z troch farieb 1,2,3.

Pre D'_2 existuje stenové rankingové zafarbenie ϕ štyrmi farbami. Stačí zobrať: $\phi(w) = 1$, $\phi(u_1) = 2$, $\phi(u_2) = 1$, $\phi(u_3) = 3$, $\phi(u_4) = 1$, $\phi(v) = 4$.

Pre $n = 3$ je D'_3 graf kocky, ktorý už je popísaný v časti o stenovom rankingovom zafarbení grafov Platónskych mnohostenov.

Pre $n \geq 4$ graf $D'_n = (V_n, E_n, F_n)$, kde $V_n = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2n}, v, w\}$,

$E_n = \{\{u_j, u_{j+1}\};\ j \in \{1,2,\ldots,2n\} \pmod{2}\} \cup \{\{v, u_{2i}\}, \{w, u_{2i-1}\};\ i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$. $F_n = \{\alpha_i;\ \alpha_i = [v, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}],\ i \in \{1,2,\ldots,2n\}\ i$ párne $\} \cup$ $\cup\ \{\beta_i;\ \beta_i = [w, u_i, u_{i+1}, u_{i+2}];\ i \in \{1,2,\ldots,2n\}\ i$ nepárne $\}$ (indexy $i+1$, $i+2$ sú počítane modulo 2n).

Nech $\mathfrak{r}_5$ je stenové rankingové zafarbenie tromi farbami. Uvažujme steny $\alpha_1 = [u_1, u_2, v, u_{2n}]$, $\alpha_n = [v, u_2, u_3, u_4]$, $\beta_1 = [u_1, u_2, u_3, w]$, $\beta_2 = [w, u_3, u_4, u_5]$.

Existjú tri možnosti zafarbenia vrcholu w. Tri prípady ktoré môžu nastať sú identické s prípadmi pre $n = 2$ rozobrané vyššie, stačí uvažovať $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha'_2 = \alpha_n$, $\beta'_1 = \beta_1$, $\beta'_2 = \beta_2$. Preto je na zafarbenie D'_n potrebné použiť aspoň štyri farby.

Ak n je párne, tak D'_n vieme zafarbiť štyrmi farbami. Stači zaobrať zafarbenie ϕ, kde pre každé $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ je definované nasledovne:

$\phi(u_{2i-1}) = 1$,

$\phi(u_{2i}) = 2$, pre i nepárne,

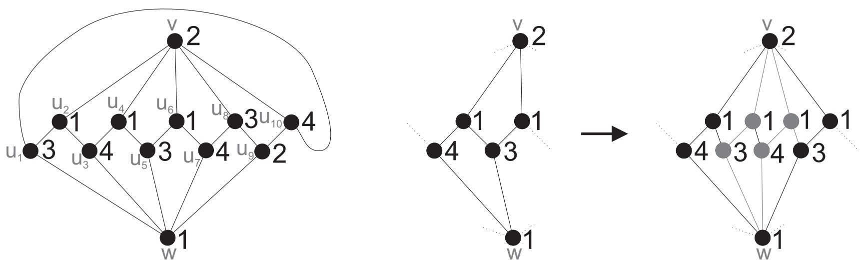
$\phi(u_{2i}) = 3$, pre i párne,

$\phi(v) = \phi(w) = 4$.

Každá stena α_i (pre $i \in \{1,2,\ldots,n\}$) má potom vrcholy zafarbené ako v postupnosti $(1,2,3,4)$ a každá stena β_i má vrcholy zafarbené buď ako v postupnosti $(1,2,1,4)$ alebo $(1,3,1,4)$.

Pre nepárne n to však nefunguje, lebo stena α_n by bola zafarbená ako farebná postupnosť $(1,2,4,2)$. Existovala by teda na α_n stenová cesta $[u_{2n}, u_1, u_2]$ s koncami farby 2 a medzi nimi by bol iba vrchol farby 1. Stačilo by zmeniť farbu jedného vrchola a nahradiť ju vyššou. Preto ak n je nepárne, tak D'_n vieme zafarbiť piatimi farbami.

Pre nepárne n zostrojíme stenové rankingové zafarbenie štyrmi farbami inak.



Obr. 14: Stenové rankingové zafarbenie D'_5 a konštrukcia pre nepárne $n \geq 7$

Nech n je nepárne. Zafarbenie ϕ je pre $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ definované nasledovne:

$$\begin{aligned} &\phi(w) = 1, && \phi(v) = 2, \\ &\phi(u_{2n-1}) = 2, && \phi(u_{2i-1}) = 3, \text{ pre } i \text{ nepárne}, \\ &\phi(u_{2n-3}) = 3, && \phi(u_{2i-1}) = 4, \text{ pre } i \text{ párne}, \\ &\phi(u_{2n-2}) = 3, && \phi(u_{2n}) = 4, \qquad \phi(u_{2i}) = 1. \end{aligned}$$

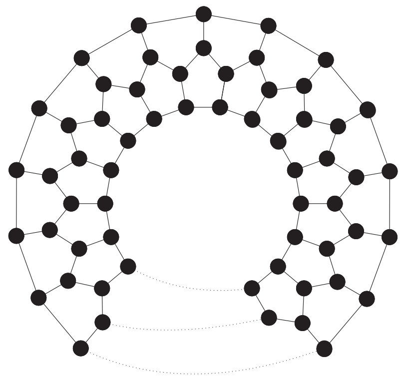
Ak $n = 3$, tak D'_3 je graf kocky a podľa *Vety 4.4* stačia štyri faby na jej zafarbenie. Pre $n = 5$ je zafarbenie štyrmi farbami D'_5 na *Obrázku 14 vľavo* podľa vyššie uvedeného predpisu. Na *Obrázku 14 vpravo* je naznačená konštrukcia, ako pre n nepárne dosiahneme zafarbenie štyrmi farbami z grafu D'_n pre graf D'_{n+1}. V tejto konštrukcii namiesto dvoch susedných stien, ktoré sú jedna incidentná s v, druhá s w, vznikne šesť nových stien tak, že sa zruší ich spoločná hrana a namiesto nej sa pridá 6-vrcholová cesta. Pribudnú tak 4 nové vrcholy, ktorým dáme farby (zľava) 1, 3, 1, 4 ako na *Obrázku 14*. Týchto šesť nových stien spĺňa podmienky stenového rankingového zafarbenia. Na všetky ostatné steny táto zmena nemá vplyv. Preto ostatné vrcholy, tak ako v pôvodnom grafe, spĺňajú podmienky stenového rankingového zafarbenia. □

5.6 Zovšeobecnený dvanásťsten

Zovšeobecnený dvanásťsten dostaneme z grafu dvanásťstena tak, že fixujeme vonkajšiu a vnútornu stenovú kružnicu. Ku zafixovaným kružniciam popridávame steny stupňa päť (k vonkajšej n stien zvnútra, ku vnútornej iných n stien zvonku), pričom steny do seba zapadnú. Všetkých $4n$ vrcholov je stupňa tri, $2n$ stien je stupňa päť, dve zafixované steny, ktoré označíme α a β majú stupeň n. Zovšeobecnenie dostaneme pre $n \geq 3$, označme graf vzniknutý týmto zovšeobecnením D^*_n.

Pre $n = 5$ ide o graf dvanásťstena, jeho stenové rankingové zafarbenie je popísané v časti o grafoch Platónskych mnohostenov (pozri *Vetu 4.5*).

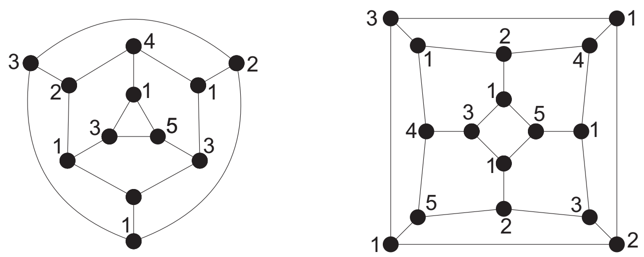
Vrcholy grafu D^*_n incidentné s vonkajšou n-uholníkovou stenou označíme $u_1, u_2, \dots, u_n$, s vnútornou n-uholníkovou stenou $w_1, w_2, \dots, w_n$ a ostatné vrcholy $w_1, w_2, \dots, w_{2n}$, pričom hranou sú spojené vrcholy $\{u_i, u_{i+1}\}$, $\{v_i, v_{i+1}\}$, (indexy sú počítané modulo n), $\{w_j, w_{j+1}\}$ (indexy sú počítané modulo 2n), $\{u_i, w_{2i-1}\}$, $\{v_i, w_{2i}\}$, pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$.



Obr. 15: Graf zovšeobecnenia dvanásťstena

Veta 5.7. *Nech pre $n \geq 3$ je graf D_n^* zovšeobecnenie dvanásťstena. Potom $\chi_{sr}(D_3^*) = \chi_{sr}(D_4^*) = 5$ a pre $n \geq 6$ platí:* $1 + \lceil \log_2 n \rceil \leq \chi_{sr}(D_n^*) \leq 4 + \lceil \log_2 n \rceil$.

Dôkaz. Stenové rankingové zafarbenie grafov D_3^* a D_4^* je na *Obrázku 16*.



Obr. 16: Grafy D_3^* a D_4^* so stenovým rankingovým zafarbením

Nutnosť použitia piatich farieb v stenovom rankingovom zafarbení pre grafy D_3^* a D_4^* dokážeme nasledovne. Budeme predpokladať, že D_3^* a D_4^* sa dá zafarbiť štyrmi farbami. Nech $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}$ je stenové rankigové zafarbenie grafu D_3^* resp. D_4^* štyrmi farbami.

Uvažujme najprv graf D_3^*. Na jeho vonkajšej stene $[u_1, u_2, u_3]$ musia byť použité tri rôzne farby, teda aspoň raz sa použije farba 3 alebo 4. Nech $\{3, 4\} = \{c, d\}$. Potom BUNV $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_1) = c$. Vzhľadom na *Lemu 2.3* vrcholy ležiace na stenových kružniciach incidentných s u_1 už nemôžu byť farby c, teda vrcholy $u_2, u_3, w_1, w_2, w_3, w_5, w_6$. Podľa tej istej Lemy a vzhľadom na to, že na zafarbenie vrcholov 5-uholníkovej steny potrebujeme aspoň 4 farby, musí byť práve jeden z vrcholov u_2, w_1, w_2, w_3 a práve jeden z vrcholov u_3, w_1, w_5, w_6 farby d.

Prípad 1: Nech $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_1) = d$, potom vrcholy na stene $\alpha_1 = [u_1, u_2, w_3, w_2, w_1]$ a $\alpha_3 = [u_1, w_1, w_6, w_5, u_3]$ musia mať nutne farby $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_2) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_3) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_6) = 1$,

$\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_5) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_3) = 1$. Ale u_2 a u_3 nemôžu byť súčastne zafarbené rovnakou farbou, lebo sú spojené hranou a vedie to k sporu.

Prípad 2: Nech $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_2) = d$, potom vrcholy na stenových kružniciach incidentných s u_2 nemôžu mať farbu d, teda vrcholy $u_3, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$. Aj na stene α_3 musí byť použitá farba d, preto nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_6) = d$. Na stene $\alpha_2 = [u_2, u_3, w_5, w_4, w_3]$ musí byť práve raz použitá farba c, preto nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_4) = c$, lebo ostatné vrcholy steny α_2 v tomto prípade už nemôžu byť farby c. Na stene β_2 a stene $\beta_3 = [v_1, v_3, w_6, w_1, w_2]$ už je použitá farba d, preto vrcholy v_1, v_2, v_3 nemôžu byť ani farby d. Vrcholy 3-uholníkovej steny $[v_1, v_2, v_3]$ môžu byť zafarbené už iba dvoma farbami (1 a 2), ale také zafarbenie neexistuje.

Prípad 3: Nech $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_2) = d$, potom vrcholy na stenových kružniciach incidentných s w_2 nemôžu mať farbu d, teda vrcholy $u_2, w_1, w_3, w_4, w_6, v_1, v_2, v_3$. Na stene α_3 musí byť použitá farba d tiež. Ak by bolo $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_3) = d$, vzhľadom k symetrickosti tohto grafu by sme sa dopracovali k *Prípadu 2*. Preto nech $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_5) = d$. Každá zo stien α_2, β_1, β_2, β_3 musí obsahovať práve jeden vrchol farby c. Ak by bolo $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_1) = c$, tak vzhľadom k tomu, že celý graf sa dá preklopiť vonkajšou stenou dovnútra, čím vnútorna trojuholníková stena zaujme pozíciu vonkassej steny, tak by nás to doviedlo k *Prípadu 1*. Ak by bolo $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_3) = c$, tak kôli stene β_2 a stene β_3 vrcholy v_1, v_2, w_4 steny β_1 nemôžu byť farby c ale ani vrchol w_3 (pozri vyššie). Na stene β_1 neostal vrchol, ktorý by mohol byť farby c.

Teraz uvažujme graf D_4^*. Na jeho vonkajšej stene $[u_1, u_2, u_3, u_4]$ musia byť použité tri rôzne farby, teda aspoň raz sa použije farba 3 alebo 4. Nech $\{3, 4\} = \{c, d\}$. Potom BUNV $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_1) = c$. Vzhľadom na *Lemu 2.3* vrcholy ležiace na stenových kružniciach incidentných s u_1 už nemôžu byť farby c, teda vrcholy $u_2, u_3, u_4, w_1, w_2, w_3, w_7, w_8$.

Označme steny tohto grafu $\alpha_1 = [u_1, u_2, w_3, w_2, w_1]$, $\alpha_2 = [u_2, u_3, w_5, w_4, w_3]$, $\alpha_3 = [u_3, u_4, w_7, w_6, w_5]$, $\alpha_4 = [u_4, u_1, w_1, w_8, w_7]$, $\beta_1 = [v_1, v_2, w_4, w_3, w_2]$, $\beta_2 = [v_2, v_3, w_6, w_5, w_4]$, $\beta_3 = [v_3, v_4, w_8, w_7, w_6]$, $\beta_4 = [v_4, u_1, w_2, w_1, w_8]$. Pre tieto označené 5-uholníkové steny podľa tej istej Lemy a vzhľadom na to, že na zafarbenie vrcholov 5-uholníkovej steny potrebujeme aspoň 4 farby, na každej takej stene musí byť práve jeden z vrcholov farby c a práve jeden z vrcholov farby d.

Prípad 1: Nech $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_1) = d$, potom vrcholy na stene α_1 a α_4 musia mať nutne farby $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_2) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_3) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_2) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_4) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_7) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_8) = 1$. Potom kôli stenovým cestám $[w_2, v_1]$, $[w_3, w_2, v_1]$, $[w_1, w_2, v_1]$ nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_1) = c$. Ale kôli stenovým cestám $[w_8, v_2]$, $[w_7, w_8, v_2]$, $[w_1, w_8, v_2]$ a $[v_1, v_2]$ vrchol v_2 nemôže byť zafarbený žiadnou zo štyroch farieb.

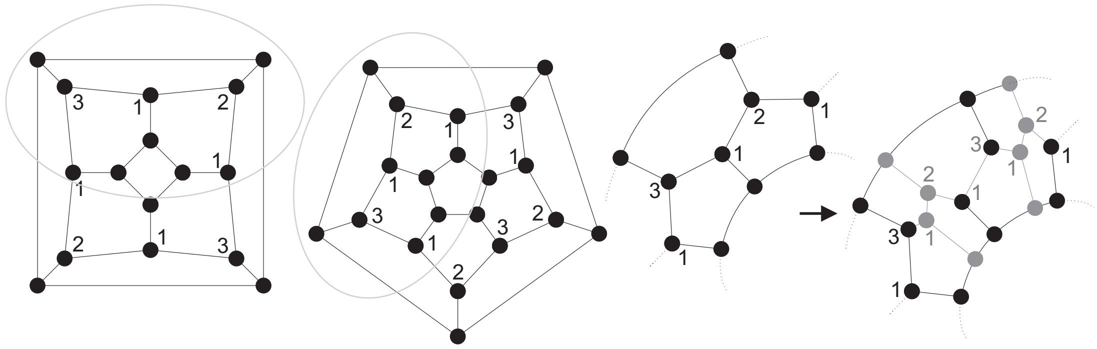
Prípad 2: Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = d$, potom pre vrcholy na stene α_1 nutne platí $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_2) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_3) = 1$. Kôli stenovým cestám $[w_3, w_4]$, $[w_2, w_3, w_4]$, $[u_2, w_3, w_4]$ je $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_4) = d$. Kôli stenovým cestám $[w_1, w_8]$, $[w_2, w_1, w_8]$, $[u_1, w_1, w_8]$ je $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_8) = c$. Kôli stenovým cestám $[w_2, v_1]$, $[w_8, w_1, w_2, v_1]$, $[w_4, w_3, w_2, v_1]$ je $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_1) = 1$. Potom na stene β_4 nutne je $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_4) = d$ a na stene β_3 následne potom je $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_3) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_6) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_7) = 1$. Kôli stenovým cestám $[w_7, u_4]$, $[w_6, w_7, u_4]$, $[w_8, w_7, u_4]$, $[u_1, u_4]$ nemôže byť vrchol u_4 žiadnej zo štyroch farieb.

Prípad 3: Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_2) = d$, potom vrcholy na stenových kružniciach incidentných s w_2 nemôžu mať farbu d, teda vrcholy $u_2, w_1, w_3, w_4, w_8, v_1, v_2, v_4$. Na stene α_4 musí byť použitá farba d tiež. Ak by bolo $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_4) = d$, vzhľadom k symetrikosti tohto grafu, by sme sa dopracovali k *Prípadu 2*. Preto nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_7) = d$. Potom vrcholy na stenových kružniciach incidentných s w_7 nemôžu mať farbu d, teda ešte vrcholy $u_3, u_4, w_5, w_6, w_8, v_3$. Teda v tomto prípade D_4^* už neobsahuje viac vrcholov farby d. Zafarbenie vrcholov steny β_2 nás však privádza ku sporu.

Prípad 4: Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_3) = d$, potom vrcholy na stenových kružniciach incidentných s w_3 nemôžu mať farbu d, teda vrcholy $u_2, u_3, w_1, w_2, w_4, w_5, v_1, v_2$. Na stene α_4 musí byť použitá farba d tiež. Ak by bolo $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_4) = d$, vzhľadom k symetrikosti tohto grafu, by sme sa opäť dopracovali k *Prípadu 2*. Ak by bolo $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_8) = d$, vzhľadom k symetrikosti tohto grafu , by sme sa dopracovali k *Prípadu 3*. Preto nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_7) = d$. Potom vrcholy na stenových kružniciach incidentných s w_7 nemôžu mať farbu d, teda ešte vrcholy u_4, w_6, w_8, v_3, v_4. Teda aj v tomto prípade D_4^* už neobsahuje viac vrcholov farby d. Zafarbenie vrcholov steny β_2 nás opäť privádza ku sporu.

Uvažujme ďalej $n \geq 6$, potom graf D_n^* obsahuje stenovú kružnicu dĺžky n. Podľa *Lemy 2.4* na jej zafarbenie potrebujeme $f = 1 + \lceil \log_2 n \rceil$ farieb. Ak si uvedomíme, že neexistuje stenová cesta, ktorá by obsahovala súčastne vrcholy oboch stien α a β, môžeme použiť rovnaké zafarbenie na vrcholy stenovej kružnice dĺžky n vonkajšej steny α a aj na vrcholy stenovej kružnice rovnakej dĺžky vnútornej steny β.

Potrebujeme len ukázať, že vrcholy ktoré incidujú iba so stenami stupňa 5, vieme zafarbiť pomocou troch farieb. Takých vrcholov je párny počet. Ak na ich zafarbenie použijeme farby $(f+1)$, $(f+2)$ a $(f+3)$, tak stenové cesty obsahujúce vrcholy incidentné s niektorou zo stien α a β, budú spĺňať podmienky stenového rankingového zafarbenia. Stenové cesty ktoré neobsahujú vrcholy incidentné s niektorou zo stien α alebo β, obsahujú nanajvýš 3 vrcholy a z nich môže byť najviac jeden farby $(f+3)$.



Obr. 17: Graf zovšeobecnenia dvanásťstena s konštrukciou zafarbenia

Na *Obrázku 17 vľavo* je graf D_4^* a D_5^*. V týchto grafoch je naznačené ako majú byť zafarbené vrcholy, ktoré neincidujú so stenami α a β. Čísla 1, 2, 3 na obrázku znamenajú, že na zafarbenie daných vrcholov majú byť použité farby $(f+1)$, $(f+2)$ a $(f+3)$. Na *Obrázku 17 vpravo* je naznačená konštrukcia zafarbenia z grafu D_n^* na graf D_{n+2}^*, pričom vychádzame z časti grafu D_4^* resp. D_5^* ohraničenej elipsou. V konštrukcii sa zafarbenie použije pre vrholy incidentné iba s 5-uholníkovými stenami. Vrcholy incidentné len s α alebo len s β sa zafarbia ako kružnica s daným počtom vrcholov. $\square$

6 Grafy Archimedovských mnohostenov

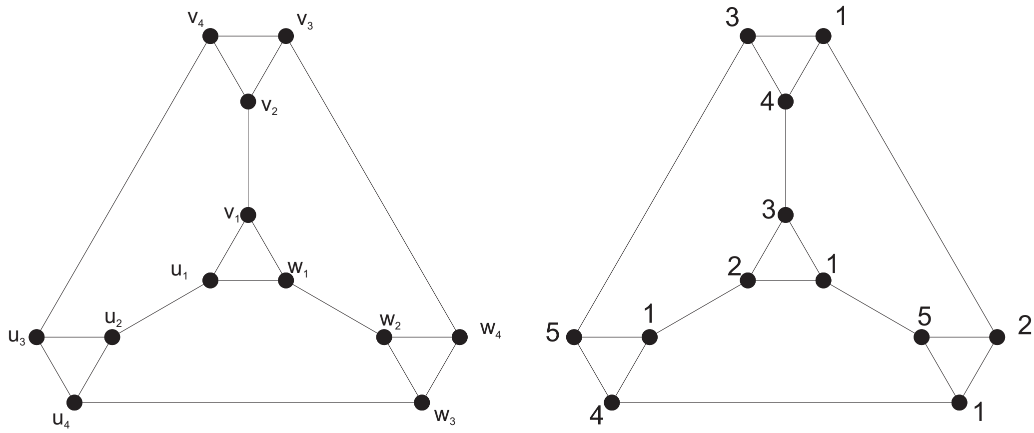
Popis Archimedovských mnohostenov je pekne vypracovaný v knihe od Cromwella [4]. Množina archimedovských mnohostenov pozostáva z 13 pravidelných mnohostenov. Okolo každého vrchola sú rozostavené steny rovnako. Niektoré z týchto grafov vieme skonštruovať z Platónskych mnohostenov. Uvažujeme teda v ďalšom grafy týchto 13 mnohostenov:

1. (3,6,6)-mnohosten (známy ako otupený tetraéder alebo tiež otupený štvorsten); jeho graf označme (ozn.) $A_{(3,6,6)}$,
2. (3,8,8)-mnohosten (otupený hexaéder alebo otupená kocka); ozn. $A_{(3,8,8)}$,
3. (3,10,10)-mnohosten (otupený dodekaéder alebo otupený dvanásťsten); ozn. $A_{(3,10,10)}$,
4. (4,6,6)-mnohosten (otupený oktaéder alebo otupený osemsten); ozn. $A_{(4,6,6)}$,
5. (4,6,8)-mnohosten (otupený kubooktaéder); ozn. $A_{(4,6,8)}$,
6. (4,6,10)-mnohosten (otupený ikosododekaéder); ozn. $A_{(4,6,10)}$,
7. (5,6,6)-mnohosten (otupený ikosaéder alebo otupený dvadsaťsten); ozn. $A_{(5,6,6)}$,
8. (3,4,3,4)-mnohosten (kubooktaéder); ozn. $A_{(3,4,3,4)}$,
9. (3,4,4,4)-mnohosten (rombokubooktaéder); ozn. $A_{(3,4,4,4)}$,
10. (3,4,5,4)-mnohosten (romboikosododekaéder); ozn. $A_{(3,4,5,4)}$,
11. (3,5,3,5)-mnohosten (ikosododekaéder); ozn. $A_{(3,5,3,5)}$,
12. (3,3,3,3,4)-mnohosten (obsekaný hexaéder); ozn. $A_{(3,3,3,3,4)}$,
13. (3,3,3,3,5)-mnohosten (obsekaný dodekaéder); ozn. $A_{(3,3,3,3,5)}$.

V nasledujúcich častiach sa budeme venovať stenovému rankingovému zafarbeniu grafov archimedovských mnohostenov. Budeme sa pre ne snažiť určiť presne charakteristiku χ_{sr} alebo aspoň jej približný odhad. Budeme pritom využívať aj konkrétne stenové rankingové zafarbenie daných grafov.

6.1 Otupený tetraéder

Graf otupeného tetraédra vznikne orezaním vrcholov grafu tetraédra. Vzniknú tak nové štyri trojuholníkové steny a pôvodné steny tetraédra majú vo vzniknutom grafe dvojnásobný stupeň.



Obr. 18: Graf (3,6,6)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 5 farbami

Veta 6.1. $\chi_{sr}(A_{(3,6,6)}) = 5$

Dôkaz. Označme vrcholy grafu (3,6,6)-mnohostena ako na *Obrázku 18 vľavo*. Tento graf vieme rankingovo zafarbiť pomocov piatich farieb (*Obrázok 18 vpravo*) nasledovne:
$\phi(u_1) = 2$, $\phi(u_2) = 1$, $\phi(u_3) = 5$, $\phi(u_4) = 4$, $\phi(v_1) = 3$, $\phi(v_2) = 4$, $\phi(v_3) = 1$, $\phi(v_4) = 3$, $\phi(w_1) = 2$, $\phi(w_2) = 5$, $\phi(w_3) = 1$, $\phi(w_4) = 2$.

Tento graf obsahuje okrem iného aj stenovú kružnicu dĺžky 6. Na rankingové zafarbenie takejto kružnice sú potrebné minimálne 4 farby. Vrcholy tejto kružnice vieme zafarbiť jednou z piatich možností:

i)	$(1, 2, 1, 3, 1, 4)$,	*iv)*	$(1, 2, 3, 2, 1, 4)$,
ii)	$(1, 2, 1, 3, 2, 4)$,	*v)*	$(1, 2, 4, 2, 1, 3)$.
iii)	$(1, 2, 3, 1, 2, 4)$,		

Ukážeme, že celý graf $A_{(3,6,6)}$ nevieme zafarbiť štyrmi farbami. Keby sa graf dal zafarbiť pomocou štyroch farieb, tak máme k dispozíci niekoľko možností ako môžu byť zafarbené vrcholy nejakej 6-uholníkovej steny incidentnej s vrcholmi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in V(A_{(3,6,6)})$, pričom nech každá z hrán $e_1 = \{x_1, x_2\}$,

$e_2 = \{x_3, x_4\}$ a $e_3 = \{x_5, x_6\}$ ešte inciduje s niektorou z 3-uholníkových stien. V prípade zafarbení *i)* a *ii)* aspoň na jednej z hrán e_1, e_2, e_3 sú konce hrany zafarbené farbami 1 a 2. V prípade zafarbení *iii), iv), v)* je BUNV buď $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_1) = 1$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_2) = 2$ alebo $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_2) = 1$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_3) = 2$. V druhom prípade sú potom vrcholy incidentné s hranou e_3 farby 1 a 2. V ďalšom využijeme, že stále nastnane prípad, keď dva vrcholy incidentné so 6-uholníkovou stenou a súčastne aj s trojuholníkovou stenou sú zafarbené farbami 1 a 2.

Nech ϑ je vonkajšia 6-uholníková stena, ktorá inciduje s vrcholmi $u_3, u_4, w_3, w_4, v_3, v_4$. Môžeme BUNV predpokladať, že $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_4) = 2$. Uvažujme stenovú kružnicu $C_6 = [v_1, v_2, v_4, u_3, u_2, u_1]$. Vrcholy u_2 a v_4 nemôžu byť zafarbené ani farbou 1, lebo sú susedné s vrcholom farby 1, ani farbou 2 lebo by existovala stenová cesta $[u_2, u_3, v_4]$ alebo $[u_2, u_3, u_4]$ na troch vrcholoch s koncovými vrcholmi farby 2, medzi ktorými by bol iba vrchol farby 1, ani rovnakou farbou súčastne kôli stenovej ceste $[u_2, u_3, v_4]$. Preto musí byť jeden z vrcholov u_2, u_4 farby 3 a druhý farby 4. Na tejto kružnici C_6 potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_1) = 2$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_2) = 1$. Rozlíšime dva pripady:

Prípad 1 Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 3$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_4) = 4$. Na stene ϑ potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_3) = 1$ kôli stenovým cestám $[w_3, u_4]$, $[w_3, u_4, u_2]$, $[w_3, u_4, u_3, v_4]$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_4) = 3$ kôli stenovým cestám $[w_4, w_3]$, $[w_4, w_3, u_4]$, $[w_4, w_3, u_4, u_3, v_4]$. Avšak vrchol v_3 nemôže byť farby 1, 3, 4, pretože susedí s vrcholmi zafarbenými týmito farbami a ani farby 2, lebo leží na stenovej ceste $[v_1, v_2, v_3]$. Teda $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_3) \notin \{1, 2, 3, 4\}$.

Prípad 2 Nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 4$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_4) = 3$. Na stene ϑ potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_3) = 1$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_4) = 4$. Avšak $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_3) \notin \{1, 2, 3, 4\}$ podobne ako v predchádzajúcom prípade.

Teda na stenové rankingové zafarbenie grafu $A_{(3,6,6)}$ potrebujeme aspoň 5 farieb.

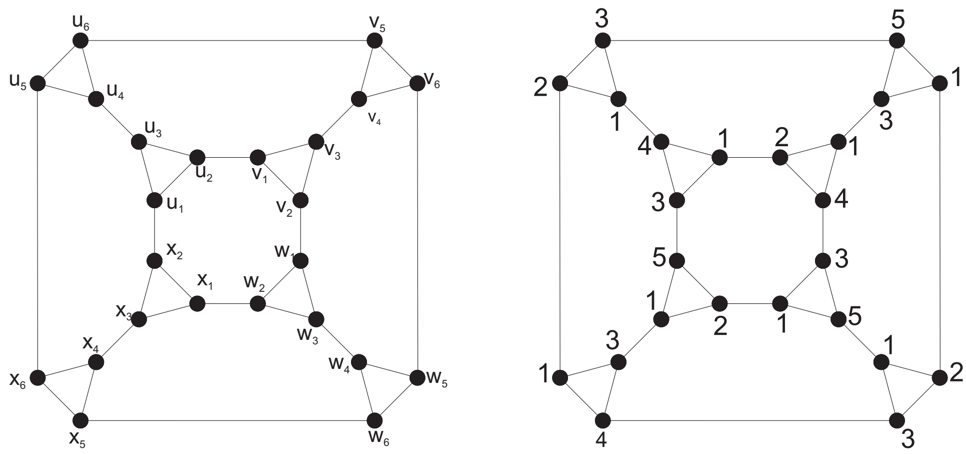
□

6.2 Otupený hexaéder

Graf otupeného hexaédra vznikne orezaním vrcholov grafu kocky. Vznikne tak osem nových trojuholníkových stien. Pôvodné steny kocky majú vo vzniknutom grafe dvojnásobný stupeň. Všetky vrcholy sú stupňa tri.

Veta 6.2. $\chi_{sr}(A_{(3,8,8)}) = 5$

Dôkaz. Označme vrcholy grafu $A_{(3,8,8)}$ ako to je na *Obrázku 19 vľavo*. Nech $C_8 = [y_1, y_2, \ldots, y_8]$ je stenová kružnica dĺžky 8. C_8 sa dá podľa *Lemy 2.4* rankingovo



Obr. 19: Graf (3,8,8)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 5 farbami

zafarbiť štyrmi farbami a to tak, že BUNV vrcholy $y_1, y_2, \ldots, y_8$ na tejto kružnici musia byť zafarbené tak, ako to vyjadruje postupnosť farieb $(1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4)$. (Až na otočenie vrcholov a obrátený smer postupnosti je to jediný možný spôsob zafarbenia C_8.)

Ak by boli na stenovej kružnici C_8 dva susedné vrcholy zafarbené farbami rôznymi od farby 1, nutne by sa musela použiť už aj farba 5. Nech tomu tak nie je a ak sú dva susedné vrcholy zafarbené vyššími farbami ako 1 nech na rankingové zafarbenie C_8 stačia štyri farby. Nech BUNV $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(y_1) = a$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(y_2) = b$, kde $1 < a < b \leq 4$.
Prípad 1: Ak $b = 4$, $a = 3$, tak podľa *Lemy 2.3* ostatných 6 vrcholov musíme zafarbiť už len pomocou farieb 1 a 2, to sa však nedá.
Prípad 2: Ak $b = 4$, $a = 2$, tak nutne farba vrchola y_8 nemôže byť ani 2 ani 4, teda $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(y_8) \in \{1, 3\}$. Preto buď $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(y_8) = 3$ alebo v prípade ak $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_8) = 1$, tak nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(y_7) = 3$. V oboch prípadoch ostávajú teda ešte aspoň štyri vrcholy (presnejšie y_3, y_4, y_5, y_6), ktoré ležia na stenovej kružnici C_8, ale tiež na stenovej ceste, ktorá ich všetky obsahuje. Podľa *Lemy 2.2* cesta, ktorá má štyri vrcholy, vyžaduje aspoň 3 farby. Ale vzhľadom na to, že farby 3 a 4 už sú použité, ostávajú podľa *Lemy 2.3* už iba farby 1 a 2.
Prípad 3: Ak $b = 3$, $a = 2$, tak stačí zameniť úlohu farieb 3 a 4 a podobne nás to dovedie ku sporu ako v *prípade 2*.

Preto ak chceme stenovú kružnicu dĺžky 8 zafarbiť štyrmi farbami, musí mať každý druhý vrchol farbu 1. Uvažujme teraz stenovú kružnicu $[u_1, u_2, v_1, v_2, w_{1,2}, x_1, x_2]$ grafu $A_{(3,8,8)}$, ktorá má dĺžku 8. BUNV nech $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_1) = 1$,

$\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_2) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_2) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_2) = 4$. Potom už ale žiadna s touto stenou susedná stena nemôže byť zafarbená pomocou iba štyroch farieb. To preto, lebo žiaden z vrcholov u_3, v_3, w_3, x_3 nemôže byť zafarbený farbou 1 a napríklad na stenovej kružnici $[u_3, u_4, u_5, v_6, v_4, v_3, v_1]$ je $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 2$ a je aj $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) \neq 1$, pričom u_2, u_3 sú susedné. To nás vzhľadom k vyššie uvedenému núti použiť na tejto kružnici aj farbu 5.

Pre úplnosť už len stačí zobrať nasledujúce stenové rankingové zafarbenie ϕ pomocou 5 farieb tak, ako to je aj na *Obrázku 19 vpravo*, ktoré je definované nasledovne:

$$\begin{array}{llllll}
\phi(u_1) = 3, & \phi(u_2) = 1, & \phi(u_3) = 4, & \phi(u_4) = 1, & \phi(u_5) = 2, & \phi(u_6) = 3, \\
\phi(v_1) = 2, & \phi(v_2) = 4, & \phi(v_3) = 1, & \phi(v_4) = 3, & \phi(v_5) = 5, & \phi(v_6) = 1, \\
\phi(w_1) = 3, & \phi(w_2) = 1, & \phi(w_3) = 5, & \phi(w_4) = 1, & \phi(w_5) = 2, & \phi(w_6) = 3, \\
\phi(x_1) = 2, & \phi(x_2) = 5, & \phi(x_3) = 1, & \phi(x_4) = 3, & \phi(x_5) = 4, & \phi(x_6) = 1.
\end{array}$$ □

6.3 Otupený dodekaéder

Graf otupeného dodekaédra vznikne orezaním vrcholov grafu dvanásťstena. Vznikne tak 20 nových trojuholníkových stien. Pôvodné steny dvanásťstena majú vo vzniknutom grafe dvojnásobný stupeň.

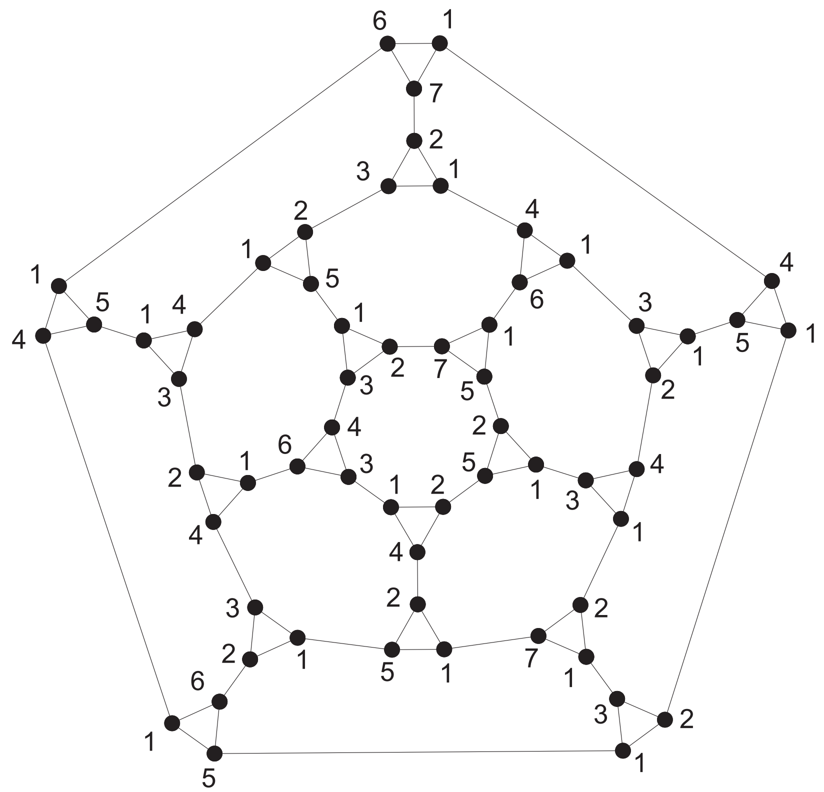
Veta 6.3. $5 \leq \chi_{sr}(A_{(3,10,10)}) \leq 7$

Dôkaz. Graf $A_{(3,10,10)}$ obsahuje 3-uholníkové a 10-uholníkové steny. Hranica takejto 10-uholníkovej steny je kružnica dĺžky 10, na ktorú je podľa *Lemy 2.4* potrebné použiť aspoň 5 farieb. Na *Obrázku 20* je stenové rankingové zafarbenie tohto grafu siedmimi farbami. □

Presnejšie stanovenie čísla $\chi_{sr}(A_{(3,10,10)})$ zrejme vedie k rozobratiu veľkého počtu možností. Preto je zatiaľ odhad pre stenové rankingové chromatické číslo grafu $A_{(3,10,10)}$ medzi 5 a 7.

6.4 Otupený oktaéder

Graf otupeného oktaédra vznikne orezaním vrcholov grafu osemstena. Vznikne tak šesť nových 4-uholníkových stien. Pôvodné steny osemstena majú vo vzniknutom grafe dvojnásobný stupeň.



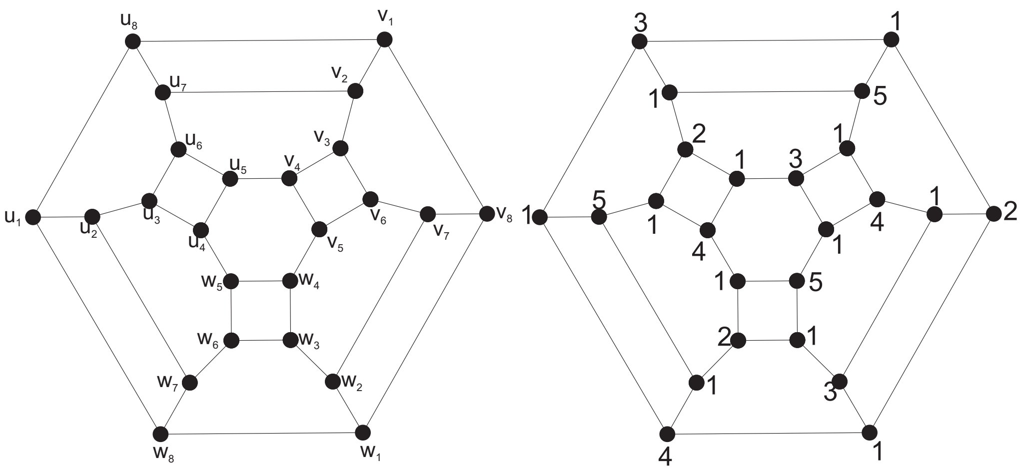
Obr. 20: Graf (3,10,10)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 7 farbami

Veta 6.4. $\chi_{sr}(A_{(4,6,6)}) = 5$

Dôkaz. Pre stenové rankingové zafarbenie ϕ grafu $A_{(4,6,6)}$ stačí použiť 5 farieb. Tak ako na *Obrázku 21 vpravo* je ϕ definované nasledovne:

$$\begin{array}{llllll}
\phi(u_1) = 1, & \phi(u_5) = 1, & \phi(v_1) = 2, & \phi(v_5) = 1, & \phi(w_1) = 1, & \phi(w_5) = 1, \\
\phi(u_2) = 5, & \phi(u_6) = 2, & \phi(v_2) = 5, & \phi(v_6) = 4, & \phi(w_2) = 3, & \phi(w_6) = 2, \\
\phi(u_3) = 1, & \phi(u_7) = 1, & \phi(v_3) = 1, & \phi(v_7) = 1, & \phi(w_3) = 1, & \phi(w_7) = 1, \\
\phi(u_4) = 4, & \phi(u_8) = 3, & \phi(v_4) = 3, & \phi(v_8) = 2, & \phi(w_4) = 5, & \phi(w_8) = 4.
\end{array}$$

Graf $A_{(4,6,6)}$ obsahuje 4-uholníkové a 6-uholníkové steny. Teda obsahuje aj stenovú kružnicu dĺžky 6, na ktorú je podľa *Lemy 2.4* potrebné použiť aspoň 4 farby. Ukážeme však, že tento graf štyrmi farbami nevieme zafarbiť. Predpokladajme teda, že $\mathfrak{r}_5$ je stenové rankingové zafarbenie grafu $A_{(4,6,6)}$ štyrmi farbami. Nech ϑ je 6-uholníková stena, ktorá inciduje s vrcholmi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,\ x_i \in V(A_{(4,6,6)})$. Tieto vrcholy vieme zafarbiť jednou z piatich možností farebných postupností



Obr. 21: Graf (4,6,6)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 5 farbami

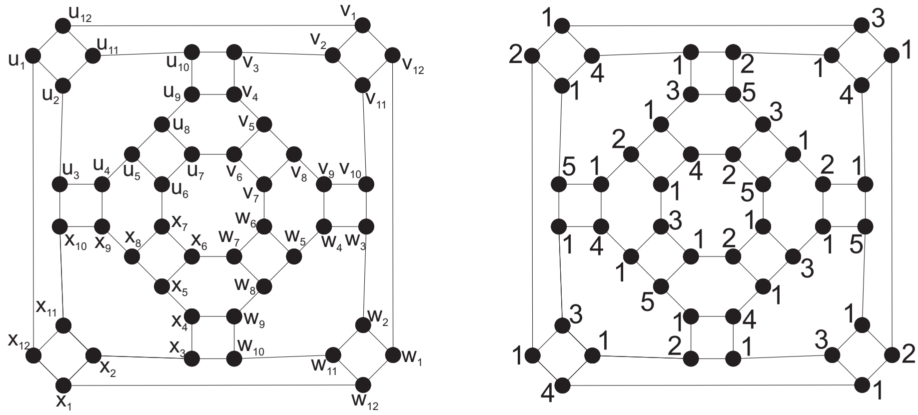
$(1,2,1,3,1,4)$, $(1,2,1,3,2,4)$, $(1,2,3,1,2,4)$, $(1,2,3,2,1,4)$, $(1,2,4,2,1,3)$. Avšak aspoň na jednej zo susedných 6-uholníkových stien steny ϑ sa vynúti zafarbenie $(1,2,1,3,1,4)$. Označme vrcholy grafu $A_{(4,6,6)}$ ako na *Obrázku 21 vľavo*. Uvažujme BUNV vonkajšiu 6-uholníkovú stenu α, ktorá inciduje s vrcholmi $u_1, u_8, v_1, v_8, w_1, w_8$ a dve 6-uholníkové steny, β incidentnú s vrcholmi $v_2, v_3, v_4, u_5, u_6, u_7$ a γ incidentnú s vrcholmi $v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_8$. BUNV existujú dve možnosti, ako sú zafarbené štyrmi farbami vrcholy incidentné so stenou α. Rozlíšime dva prípady.

Prípad 1): Vrcholy steny α sú orientované súhlasne s farebnou postupnosťou $(1,2,1,3,1,4)$, teda $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_8) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_8) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_8) = 4$. Potom vrchol v_2 nemôže byť ani farby 1 ani farby 2 a ani farby 3. Nech teda $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_2) = 4$. Vrchol u_7 by mohol byť farby 1 alebo 3. Ale nemôže byť farby 3, lebo susedné vrcholy u_7 a v_2 incidujú so 6-uholníkovou stenou β a stenová kružnica incidentná so stenou β sa nedá zafarbiť pomocou štyroch farieb, ak sú dva jej susedné vrcholy zafarbené farbami 3 a 4 (dôsledok *Lemy 2.3*). Musí platiť: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_7) = 1$. Uvažujme ďalej stenu γ. Ak chceme aby boli použité iba štyri farby musí platiť: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_3) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_6) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_7) = 1$. Vrchol w_2 však nemôže byť zafarbený žiadnou zo štyroch farieb kôli stenovým cestám $[w_2, v_7]$, $[w_2, v_7, v_6]$, $[w_2, v_7, v_8]$, $[w_2, w_1, w_{,8}]$.

Prípad 2): Vrcholy steny α sú orientované nesúhlasne s farebnou v postupnosťou $(1,2,1,3,1,4)$, teda $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_8) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_8) = 4$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_8) = 3$. Potom vrchol v_2 nemôže byť ani farby 1 ani farby 2 a ani farby 4. Nech teda $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_2) = 3$. Vrchol u_7 by mohol byť farby 1 alebo 4. Ale podobne ako v predošlom prípade nemôže byť farby 4, pretože susedné vrcholy u_7 a v_2 incidujú so 6-uholníkovou stenou β a nemôžu mať jeden farbu 3 a druhý farbu 4 súčastne. Musí platiť: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_7) = 1$. Uvažujme ďalej stenu γ. Ak chceme aby boli použité iba štyri farby musí platiť: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_3) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_6) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_7) = 1$. Vrchol w_2 nemôže byť zafarbený žiadnou zo štyroch farieb kôli tým istým stenovým cestám ako v predošlom prípade. □

6.5 Otupený kubooktaéder

Tento graf má šesť 8-uholníkových, osem 6-uholníkových a dvanásť 4-uholníkových stien. Každý vrchol je stupňna 3 a inciduje s každým typom steny.



Obr. 22: Graf (4,6,8)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 5 farbami

Veta 6.5. $\chi_{sr}(A_{(4,6,8)}) = 5$

Dôkaz. Tento graf $A_{(4,6,8)}$ obsahuje 4-uholníkové, 6-uholníkové a 8-uholníkové steny. Hranica 8-uholníkovej steny je kružnica dĺžky 8, na ktorú je podľa *Lemy 2.4* potrebné použiť aspoň 4 farby. Ukážeme teraz, že nestačí použiť 4 farby. Nech existuje stenové rankingové zafarbenie $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}$ grafu $A_{(4,6,8)}$ štyrmi farbami. Vrcholy incidentné s 8-uholníkovou stenou ležia na stenovej kružnici a musia byť zafarbené tak, ako to vyjadruje postupnosť ôsmich farieb $(1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4)$. Ak by boli na stenovej kružnici dĺžky 8 dva susedné vrcholy zafarbené dvomi farbami rôznymi od 1, nutne by sa musela použiť už aj farba 5. (Pozri dôkaz *Vety 6.2*)

Označme teda vrcholy grafu $A_{(4,6,8)}$ ako na *Obrázku 22* vľavo a nech $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}$ je také zafarbenie štyroma farbami, že BUNV na vonkajšej 8-uholníkovej stene incidentnej s vrcholmi u_1, u_{12}, v_1, v_{12}, w_1, w_{12}, x_1, x_{12} je zafarbenie nasledovné: $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_1) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_{12}) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_1) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_{12}) = 3$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_1) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(w_{12}) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_1) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_{12}) = 4$. Uvažujme vrchol u_2. Kôli stenovým cestám $[u_2, u_1]$, $[u_2, u_1, u_{12}]$, $[u_2, u_1, x_{12}]$ nemôže byť zafarbený žiadnou z farieb 1, 2, 4, preto nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_2) = 3$.

Pretože vrcholy u_3 a u_{11} susedia s vrcholom u_2 na 8-uholníkovej stene, nutne musí platiť $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_3) = \mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_{11}) = 1$. Uvažujme vrchol v_2. Tento vrchol nemôže byť zafarbený žiadnou z farieb 1, 2, 3, lebo leží na stenových cestách $[v_2, v_1]$, $[v_2, v_1, u_{12}]$, $[v_2, v_1, v_{12}]$. Preto $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_2) = 4$ a podobne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_3) = \mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_{11}) = 1$, lebo v_3 a v_{11} sú susedia v_2 na 8-uholíkovej stene. Uvažujme ešte vrchol u_{10}. Pozrime na stenové cesty $[u_{10}, u_{11}]$, $[u_{10}, u_{11}, u_{12}]$, $[u_{10}, u_{11}, u_2]$, $[u_{10}, v_3, v_2]$. Kôli týmto cestám nemôže byť vrchol u_{10} zafarbený žiadnou z farieb 1, 2, 3, 4. Preto stenové rankingové zafarbenie štyrmi farbami grafu $A_{(4,6,8)}$ neexistuje.

Na *Obrázku 22 vpravo* je stenové rankingové zafarbenie ϕ pre graf $A_{(4,6,8)}$ piatimi farbami dané nasledujúcim predpisom:

$$\begin{array}{llllll}
\phi(u_1) = 2, & \phi(u_2) = 1, & \phi(u_3) = 5, & \phi(u_4) = 1, & \phi(u_5) = 2, & \phi(u_6) = 1, \\
\phi(u_7) = 4, & \phi(u_8) = 1, & \phi(u_9) = 3, & \phi(u_{10}) = 1, & \phi(u_{11}) = 4, & \phi(u_{12}) = 1, \\
\phi(v_1) = 3, & \phi(v_2) = 1, & \phi(v_3) = 2, & \phi(v_4) = 5, & \phi(v_5) = 3, & \phi(v_6) = 2, \\
\phi(v_7) = 5, & \phi(v_8) = 1, & \phi(v_9) = 2, & \phi(v_{10}) = 1, & \phi(v_{11}) = 4, & \phi(v_{12}) = 1, \\
\phi(w_1) = 2, & \phi(w_2) = 1, & \phi(w_3) = 5, & \phi(w_4) = 1, & \phi(w_5) = 3, & \phi(w_6) = 1, \\
\phi(w_7) = 2, & \phi(w_8) = 1, & \phi(w_9) = 4, & \phi(w_{10}) = 1, & \phi(w_{11}) = 3, & \phi(w_{12}) = 1, \\
\phi(x_1) = 4, & \phi(x_2) = 1, & \phi(x_3) = 2, & \phi(x_4) = 1, & \phi(x_5) = 5, & \phi(x_6) = 1. \\
\phi(x_7) = 3, & \phi(x_8) = 1, & \phi(x_9) = 4, & \phi(x_{10}) = 1, & \phi(x_{11}) = 3, & \phi(x_{12}) = 1.
\end{array}$$

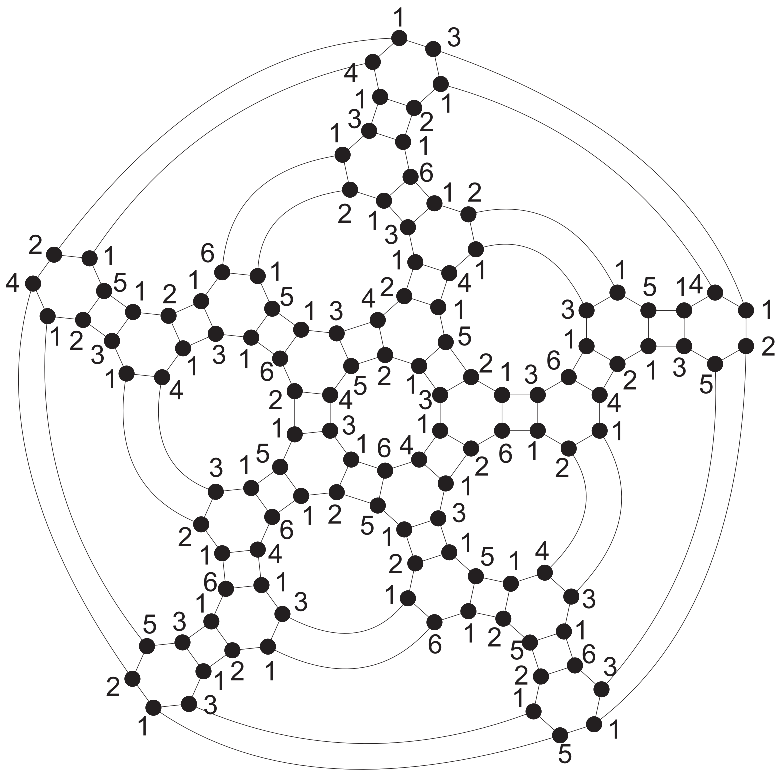
□

6.6 Otupený ikosododekaéder

Tento graf má dvanásť 10-uholníkových, dvadsať 6-uholníkových a tridsať 4-uholníkových stien. Každý vrchol je stupňna 3 a inciduje s každým typom steny.

Veta 6.6. $5 \leq \chi_{sr}(A_{(4,6,10)}) \leq 6$

Dôkaz. Graf $A_{(4,6,10)}$ obsahuje 4-uholníkové, 6-uholníkové a 10-uholníkové steny. Hranica 10-uholníkovej steny je kružnica dĺžky 10, na ktorú je podľa *Lemy 2.4* potrebné použiť aspoň 5 farieb. Na *Obrázku 23* je stenové rankingové zafarbenie tohto grafu šiestimi farbami. □



Obr. 23: Graf (4,6,10)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 6 farbami

Presnejšie stanovenie čísla $\chi_{sr}(A_{(4,6,10)})$ zrejme vedie k rozobratiu veľkého počtu možností. Preto je zatiaľ odhad pre stenové rankingové chromatické číslo grafu $A_{(4,6,10)}$ medzi 5 a 6.

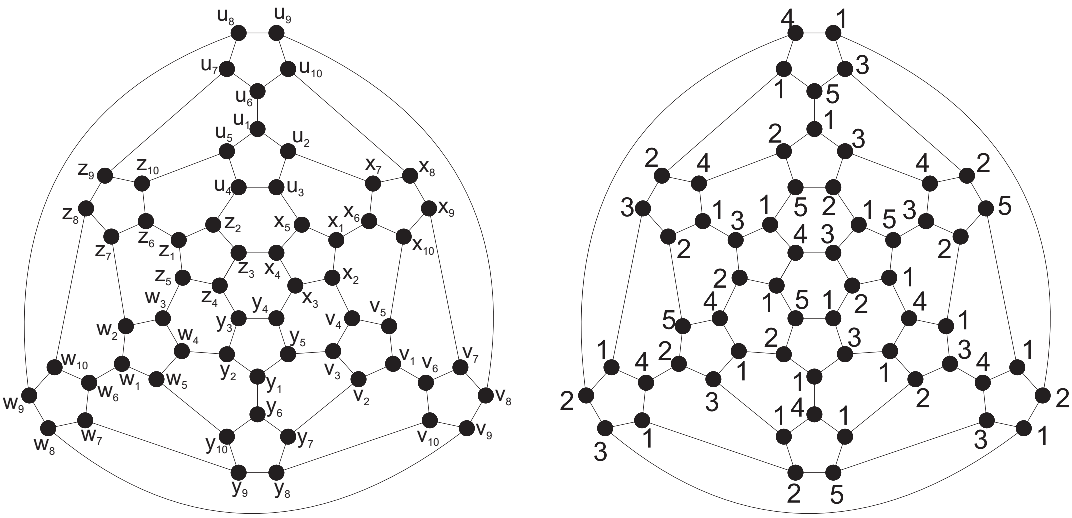
6.7 Otupený ikosaéder

Graf otupeného ikosaédra vznikne orezaním vrcholov grafu dvanasťstena. Vznikne tak dvanásť nových 5-uholníkových stien. Pôvodné steny dvanásťstena majú vo vzniknutom grafe dvojnásobný stupeň. Všetky vrcholy majú stupeň tri.

Veta 6.7. $\chi_{sr}(A_{(5,6,6)}) = 5$

Dôkaz. Tento graf obsahuje 5-uholníkové a 6-uholníkové steny. Hranica týchto stien je kružnica dĺžky 5 resp. 6, na ktorú je podľa *Lemy 2.4* potrebné použiť aspoň 4 farby. Ukážeme, že je potrebné použiť minimálne 5 farieb.

Sporom ukážeme, že 4 farby nestačia. Nech teda $\mathfrak{r}_5$ je stenové rankingové zafarbienie grafu $A_{(5,6,6)}$ štyrmi farbami. Označme vrcholy grafu $A_{(5,6,6)}$ tak, ako to je na *Obrázku 24 vpravo*. Existuje niekoľko možností ako môže byť štyrmi far-



Obr. 24: Graf (5,6,6)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 5 farbami

bami rankingovo zafarbená kružnica dĺžky 5. Uvažujme BUNV stenu α incidentnú s vrcholmi u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Vrcholy tejto steny môžu byť zafarbené podľa jedného z nasledujúcich zápisov: $(1, 2, 1, 3, 4)$, $(1, 2, 3, 1, 4)$, $(1, 2, 3, 2, 4)$, $(1, 2, 4, 1, 3)$, $(1, 2, 4, 2, 3)$. Rozoberme prípady.

Prípad 1: Stena α obsahuje farebnú postupnosť $(1, 2, 1, 3, 4)$. Nech BUNV $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_5) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_4) = 4$. Uvažujme stenu β susednú so stenou α, ktorá inciduje s vrcholmi u_3, u_4 (teda stenu $\beta = [u_3, u_4, z_2, z_3, x_4, x_5]$). Podľa *Lemy 2.3* vrcholy z_2, z_3, x_4, x_5 musia byť zafarbené iba farbou 1 alebo 2. Ale vrcholy z_2, z_3, x_4, x_5 patria stenovej ceste na ktorú je podľa *Lemy 2.2* potrebné použiť minimálne $\lceil \log_2(4 + 1) \rceil = 3$ farby. Teda aby graf $A_{(5,6,6)}$ obsahoval stenové rankingové zafarbenie štyrmi farbami nemôže obsahovať 5-uholníkovú stenu s farebnou postupnosťou $(1, 2, 1, 3, 4)$.

Prípad 2: Stena α obsahuje farebnú postupnosť $(1, 2, 3, 1, 4)$. Nech BUNV $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_5) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_4) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_2) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_1) = 4$. Uvažujme stenu β, ktorá je označená *v Prípade 1*. Vrchol z_2 nemôže byť farby 2 ani 3, ostávajú teda ešte dve možnosti.

Prípad 2.a): $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(z_2) = 1$. Potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(z_3) = 4$. Uvažujme ďalej stenu $\gamma = [u_5, u_4, z_2, z_1, z_6, z_{10}]$. Vrcholy z_1 a z_{10} môžu byť zafarbené iba farbou 3 alebo 4 a podľa *Lemy 2.3* musia byť zafarbené rôznymi farbami. Vrchol z_1 leží na stenovej ceste $[z_1, z_2, z_3]$, preto nemôže byť zafarbený farbou 4, ale ani vrchol z_{10} nemôže byť zafarbený farbou 4, pretože leží na stenovej ceste $[u_1, u_5, z_{10}]$. Preto v tomto prípade štyri farby nestačia.

Prípad 2.b): $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_2) = 4$. Potom nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_3) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_4) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_5) = 1$ a aj $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_1) = 4$. Chceme ďalej aby 5-uholníková stena $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ neobsahovala farebnú postupnosť $(1, 2, 1, 3, 4)$, lebo by sme dostali *prípad 1*, preto $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_3) = 3$. Vrchol z_4 leží na stenových cestách $[z_4, z_3]$, $[z_4, z_3, x_4]$, $[z_4, z_3, x_4, x_3]$ a $[z_4, z_3, z_2]$, preto nemôže byť zafarbený žiadnou farbou z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

Prípad 3: Stena α obsahuje farebnú postupnosť $(1, 2, 4, 1, 3)$. Nech BUNV $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_5) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_4) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_3) = 4$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_2) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_1) = 3$. Uvažujme stenu β, ktorá je označená *v Prípade 1*. Vrchol z_2 nemôže byť farby 2 ani 4, ostávajú teda dve možnosti.

Prípad 3.a): $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_2) = 1$. Potom nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_3) = 3$. Tak ako v *prípade 2.a)* uvažujme stenu γ. Vrcholy z_1 a z_{10} môžu byť zafarbené iba farbou 3 alebo 4 a podľa *Lemy 2.3* musia byť zafarbené rôznymi farbami. Vrchol z_1 leží na stenovej ceste $[z_1, z_2, z_3]$, preto nemôže byť zafarbený farbou 3, ale ani vrchol z_{10} nemôže byť zafarbený farbou 3, pretože leží na stenovej ceste $[u_1, u_5, z_{10}]$. Pre tento prípad štyri farby nestačia.

Prípad 3.b): $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_2) = 3$. Potom nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_3) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_4) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_5) = 1$ a ďalej kôli stenovým cestám $[u_4, u_5, z_{10}]$ a $[u_1, u_5, z_{10}]$ nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_{10}) = 4$, následne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_6) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_7) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_9) = 1$. Kôli stenovým cestám $[x_4, x_5, x_1]$ a $[u_3, x_5, x_1]$ je $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_1) = 3$, potom nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_6) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_7) = 2$. Keby vrchol x_8 bol farby 1, bola by 5-uholníková stena $[x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]$ zafarbená ako v *prípade 1*. Uvažujeme preto $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_8) \neq 1$. Kôli stenovej ceste $[u_1, u_2, x_7, x_8]$ je potom $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_8) = 4$. Pre vrchol u_{10} ostáva iba farba 2. Dostali sme sa k tomu, že 5-uholníková stena $[u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}]$ musí byť zafarbená farebnou postupnosťou $(1, 2, 1, 3, 4)$ z *prípadu 1*, ktorý sme už rozobrali.

Prípad 4: Stena α obsahuje farebnú postupnosť $(1, 2, 3, 2, 4)$ alebo farebnú postupnosť $(1, 2, 4, 2, 3)$. Nech $\{k, t\} = \{3, 4\}$. Nech BUNV $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_4) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_5) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_1) = k$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_2) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(u_3) = t$. Kôli stenovým cestám $[u_5, u_4, z_2]$ a $[u_3, u_4, z_2]$ platí nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_2) = k$. Potom však nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_3) = 1$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_4) = 2$, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(x_5) = 1$. Kôli stenovým cestám $[z_2, z_3, z_4]$ a $[x_4, z_3, z_4]$ je $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(z_4) = t$. Na 5-uholníkovej stene $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5]$ je však použitá farebná postupnosť z *prípadu 2* alebo z *prípadu 3*. Tieto prípady sme už rozobrali, preto nestačí použiť iba štyri farby.

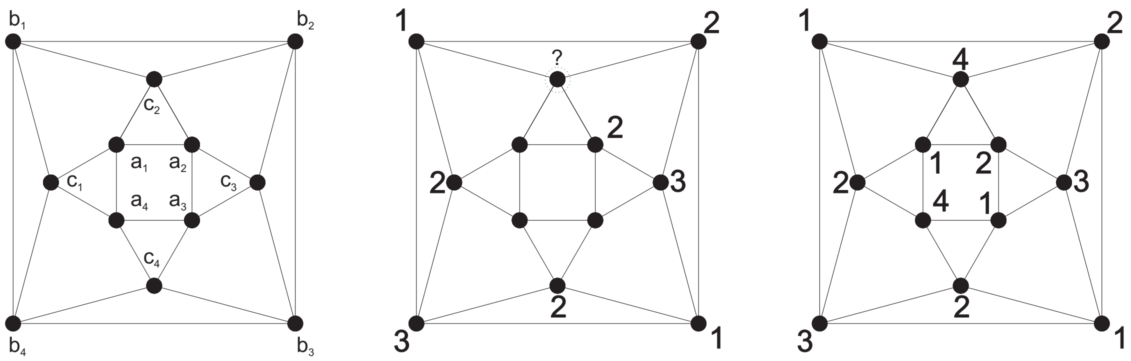
Rorobrali sme všetky možnosti, ako môžu byť zafarbené vrcholy 5-uholníkovej steny, ale tie nás priviedli k tomu, že graf $A_{(5,6,6)}$ sa nedá zafarbiť iba pomocou štyroch farieb. Kedže nevieme štyrmi farbami zafarbiť vrcholy 5-uholníkovej steny tak, aby potom bol celý graf zafarbený iba štyrmi farbami, potrebujeme na stenové rankingové zafarbenie grafu $A_{(5,6,6)}$ aspoň 5 farieb.

Na *Obrázku 24* je stenové rankingové zafarbenie ϕ grafu $A_{(5,6,6)}$ piatimi farbami definované nasledovne:

$$
\begin{array}{lllll}
\phi(u_1) = 1, & \phi(u_2) = 3, & \phi(u_3) = 2, & \phi(u_4) = 5, & \phi(u_5) = 2, \\
\phi(u_6) = 5, & \phi(u_7) = 1, & \phi(u_8) = 4, & \phi(u_9) = 1, & \phi(u_{10}) = 3, \\
\phi(v_1) = 3, & \phi(v_2) = 2, & \phi(v_3) = 1, & \phi(v_4) = 4, & \phi(v_5) = 1, \\
\phi(v_6) = 4, & \phi(v_7) = 1, & \phi(v_8) = 2, & \phi(v_9) = 1, & \phi(v_{10}) = 3, \\
\phi(w_1) = 2, & \phi(w_2) = 5, & \phi(w_3) = 4, & \phi(w_4) = 1, & \phi(w_5) = 3, \\
\phi(w_6) = 4, & \phi(w_7) = 1, & \phi(w_8) = 3, & \phi(w_9) = 2, & \phi(w_{10}) = 1, \\
\phi(x_1) = 5, & \phi(x_2) = 1, & \phi(x_3) = 2, & \phi(x_4) = 3, & \phi(x_5) = 1, \\
\phi(x_6) = 3, & \phi(x_7) = 4, & \phi(x_8) = 2, & \phi(x_9) = 5, & \phi(x_{10}) = 2, \\
\phi(y_1) = 1, & \phi(y_2) = 2, & \phi(y_3) = 5, & \phi(y_4) = 1, & \phi(y_5) = 3, \\
\phi(y_6) = 4, & \phi(y_7) = 1, & \phi(y_8) = 5, & \phi(y_9) = 2, & \phi(y_{10}) = 1, \\
\phi(z_1) = 3, & \phi(z_2) = 1, & \phi(z_3) = 4, & \phi(z_4) = 1, & \phi(z_5) = 2, \\
\phi(z_6) = 1, & \phi(z_7) = 2, & \phi(z_8) = 3, & \phi(z_9) = 2, & \phi(z_{10}) = 4. \quad \square
\end{array}
$$

6.8 Kubooktaéder

Tento graf vznikne orezaním vrcholov grafu kocky tak, že rez sa vedie stredom každej hrany. Vzniknutý graf má vrcholy stupňa 4 a steny stupňov 3 a 4.



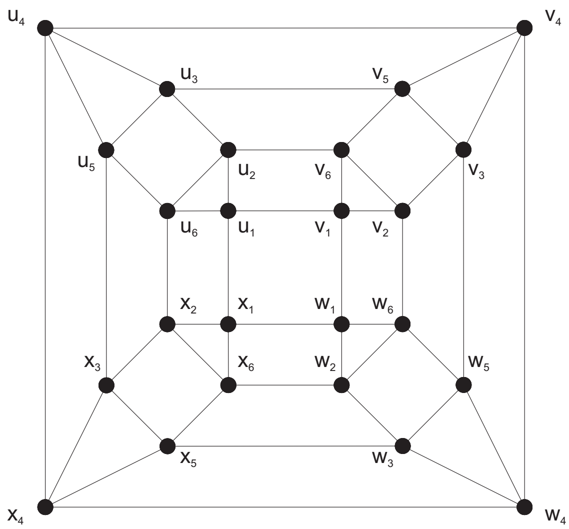
Obr. 25: Graf (3,4,3,4)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 4 farbami

Veta 6.8. $\chi_{sr}(A_{(3,4,3,4)}) = 4$

Dôkaz. Označme vrcholy grafu $A_{(3,4,3,4)}$ ako na *Obrázku 25 vľavo*. Tento graf sa nedá zafarbiť tromi farbami. Keby sa dal, tak na vonkajšej stene BUNV $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(b_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(b_2) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(b_3) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(b_4) = 3$. Potom vrcholy c_1, c_4 sú nutne farby 2 a vrchol c_3 je farby 3. Ale pre vrchol c_2 už nezvýšila žiadna z troch farieb (*Obrázok 25 v strede*). Graf dofarbíme štyrmi farbami ako na *Obrázku 25 vpravo*. Stačí zobrať $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(c_2) = 4$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(a_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(a_2) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(a_3) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(a_4) = 4$. □

6.9 Rombokubooktaéder

Tento graf vznikne orezaním vrcholov a hrán grafu kocky (Pozri β-transformácia). Vzniknutý graf má vrcholy stupňa 4 a steny stupňov 3 a 4.



Obr. 26: Graf (3,4,4,4)-mnohostena

Veta 6.9. $\chi_{sr}(A_{(3,4,4,4)}) = 4$

Dôkaz. Nech sú vrcholy grafu $A_{(3,4,4,4)}$ označené ako na *Obrázku 26.* Najprv ukážeme, že nestačí použiť iba tri farby.

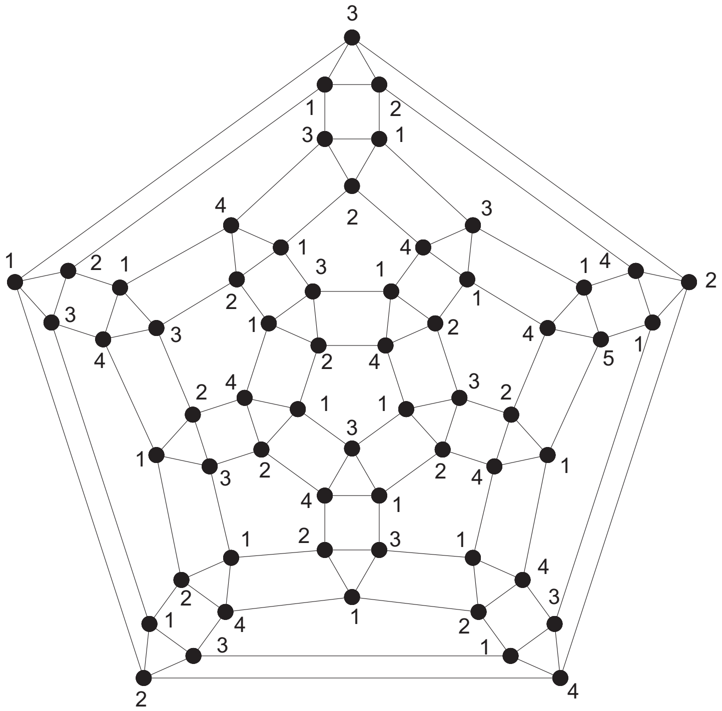
Nech teda existuje stenové rankingové zafarbenie $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}$ grafu $A_{(3,4,4,4)}$ tromi farbami. Stena $\alpha = [v_1, v_2, v_6]$ je trojuholníková stena, tak nech BUNV sú vrcholy s touto stenou incidujúce zafarbené nasledovne: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_1) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_2) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_6) = 3$. Uvažujme stenu $\beta = [v_2, v_3, v_5, v_6]$, ktorá je so stenou α susedná. Vrcholy v_3, v_5 nemôžu byť zafarbené farbou 3 a musia byť zafarbené rôznymi farbami. Vrchol v_3 navyše nemôže byť zafarbený ani farbou 2, tak nutne $\mathfrak{r}_{\mathfrak{s}}(v_3) = 1$. Teraz však už neostáva farba, ktorou by mohol byť zafarbený vrchol v_5, pretože už nemôže byť zafarbený ani farbou 1 a ani farbou 2. Preto na stenové rankingové zafarbenie $A_{(3,4,4,4)}$ tri farby nestačia. Zafarbenie štyrmi farbami existuje. Stačí zobrať zafarbenie ϕ, ktoré je dané nasledujúcim predpisom:

$$
\begin{array}{llllll}
\phi(u_1) = 1, & \phi(u_2) = 3, & \phi(u_3) = 1, & \phi(u_4) = 4, & \phi(u_5) = 2, & \phi(u_6) = 4, \\
\phi(v_1) = 2, & \phi(v_2) = 3, & \phi(v_3) = 1, & \phi(v_4) = 3, & \phi(v_5) = 2, & \phi(v_6) = 1, \\
\phi(w_1) = 1, & \phi(w_2) = 2, & \phi(w_3) = 3, & \phi(w_4) = 1, & \phi(w_5) = 2, & \phi(w_6) = 4, \\
\phi(x_1) = 3, & \phi(x_2) = 2, & \phi(x_3) = 3, & \phi(x_4) = 2, & \phi(x_5) = 1, & \phi(x_6) = 4.
\end{array}
$$

□

6.10 Romboikosododekaéder

Tento graf vznikne orezaním vrcholov a hrán (Pozri β-transformácia) dvanásťstena. Vzniknutý graf má vrcholy stupňa 4 a steny stupňov 3, 4 a 5.



Obr. 27: Graf (3,4,5,4)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 5 farbami

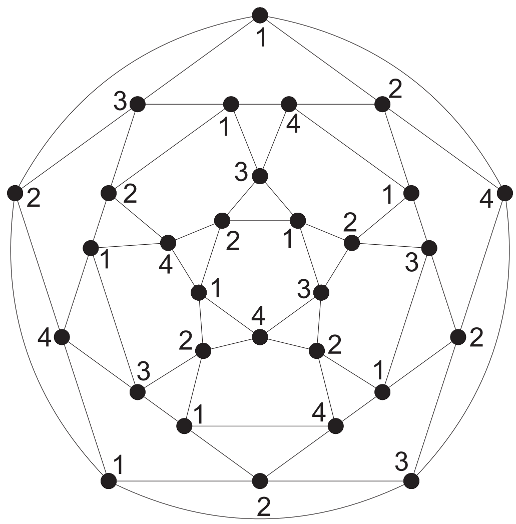
Veta 6.10. $4 \leq \chi_{sr}(A_{(3,4,5,4)}) \leq 5$

Dôkaz. Graf $A_{(3,4,5,4)}$ obsahuje stenovú kružnicu dĺžky 5, preto podľa *Lemy 2.4* na stenové rankingové zafarbenie tohto grafu potrebujeme aspoň 4 farby. Na *Obrázku 27* je stenové rankingové zafarbenie $A_{(3,4,5,4)}$ 5 farbami. □

Poznámka: Po dlhšej analýze stenového rankingového zafarbenia tohto grafu sme sa zatiaľ dopracovali k takému jeho zafarbeniu, že farba 5 je použitá iba pre jeden jeho vrchol. Nutnosť použitia piatich farieb sa nám zatiaľ nepodarilo potvrdiť ani vyvrátiť. Máme však pocit, že pre tento graf existuje stenové rankingové zafarbenie štyrmi farbami.

6.11 Ikosododekaéder

Tento graf vznikne orezaním vrcholov grafu dvanásťstena tak, že rez sa vedie stredom každej hrany. Vzniknutý graf má vrcholy stupňa 4 a steny stupňov 3 a 5.



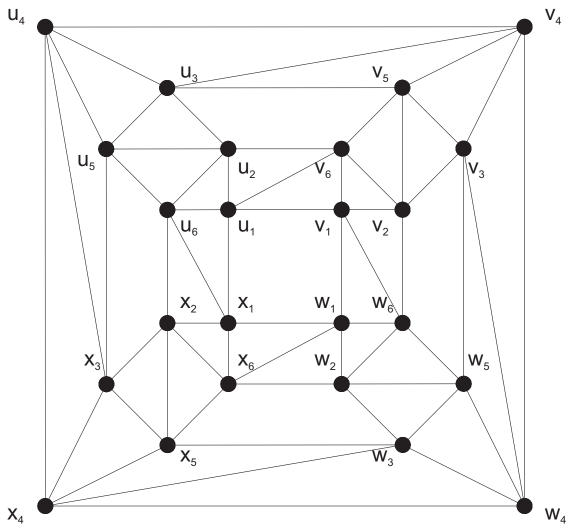
Obr. 28: Graf (3,5,3,5)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 4 farbami

Veta 6.11. $\chi_{sr}(A_{(3,5,3,5)}) = 4$

Dôkaz. Tento graf obsahuje 5-uholníkovú stenu, teda aj kružnicu dĺžky 5 a na zafarbenie jej vrcholov podľa *Lemy 2.4* potrebujeme 4 farby. Na *Obrázku 28* je stenové rankingové zafarbenie tohto grafu štyrmi farbami. □

6.12 Obsekaný hexaéder

Tento graf vznikne orezaním vrcholov a obsekaním hrán grafu kocky. V porovnaní s rombokubooktaédrom sa popridávajú ešte hrany do niektorých 4-uholníkových stien. Vzniknutý graf má vrcholy stupňa 5 a steny stupňov 3 a 4.



Obr. 29: Graf (3,3,3,3,4)-mnohostena

Veta 6.12. $\chi_{sr}(A_{(3,3,3,3,4)}) = 4$

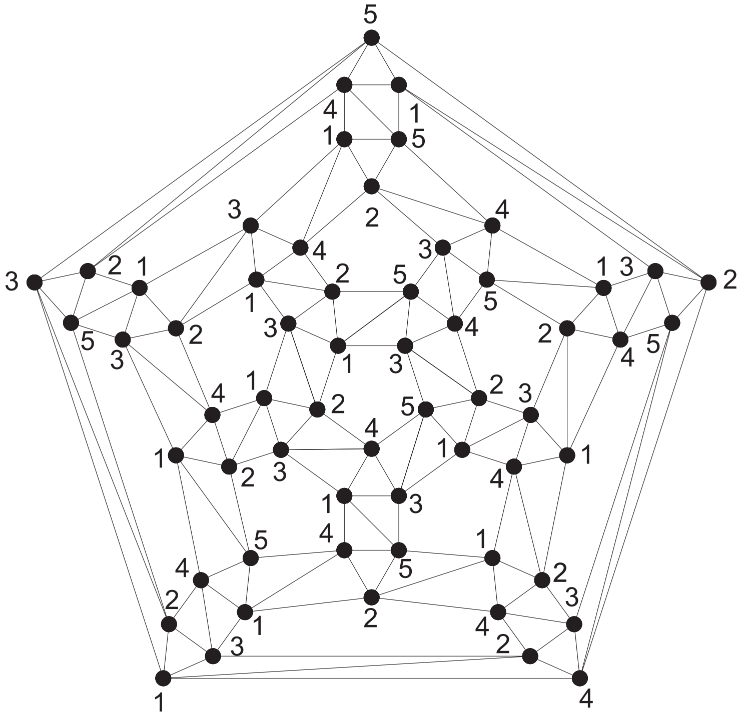
Dôkaz. Označme vrcholy grafu (3,3,3,3,4)-mnohostena tak, ako to je na *Obrázku 29.* Zafarbenie štyrmi farbami existuje. Stačí zobrať nasledujúce zafarbenie ϕ, ktoré je dané predpisom:

$$
\begin{array}{llllll}
\phi(u_1) = 2, & \phi(u_2) = 1, & \phi(u_3) = 3, & \phi(u_4) = 1, & \phi(u_5) = 4, & \phi(u_6) = 3, \\
\phi(v_1) = 3, & \phi(v_2) = 1, & \phi(v_3) = 3, & \phi(v_4) = 4, & \phi(v_5) = 2, & \phi(v_6) = 4, \\
\phi(w_1) = 1, & \phi(w_2) = 3, & \phi(w_3) = 2, & \phi(w_4) = 1, & \phi(w_5) = 4, & \phi(w_6) = 2, \\
\phi(x_1) = 4, & \phi(x_2) = 1, & \phi(x_3) = 2, & \phi(x_4) = 3, & \phi(x_5) = 4, & \phi(x_6) = 2.
\end{array}
$$

Ukážeme, že graf $A_{(3,3,3,3,4)}$ sa nedá zafarbiť tromi farbami. Keby existovalo také stenové rankingové zafarbenie $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}$, tak BUNV na vonkajšej stene $\alpha = [u_4, v_4, w_4, x_4]$, by boli tieto vrcholy zafarbené tromi farbami nasledovne: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_4) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_4) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_4) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_4) = 3$. Potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_3) = 3$ a následne potom aj $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_5) = 1$ a $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_6) = 2$. Pre v_2 neostáva žiadna z troch farieb. $\square$

6.13 Obsekaný dodekaéder

Tento graf vznikne orezaním vrcholov a obsekaním hrán grafu dvanásťstena. V porovnaní s romboikosododekaédrom sa popridávajú ešte hrany do 4-uholníkových stien. Vzniknutý graf má vrcholy stupňa 5 a steny stupňov 3 a 5. Táto situácia je na prvý pohľad podobná zafarbeniu grafu $A_{(3,4,5,4)}$ (romboikosododekaédra).



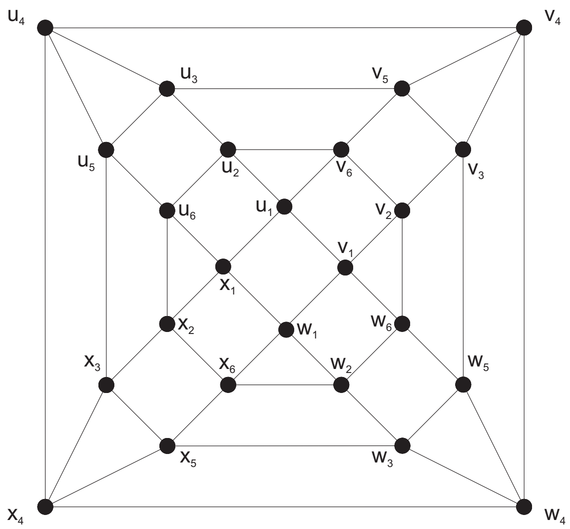
Obr. 30: Graf (3,3,3,3,5)-mnohostena, stenové rankingové zafarbenie 5 farbami

Veta 6.13. $4 \leq \chi_{sr}(A_{(3,3,3,3,5)}) \leq 5$

Dôkaz. Graf $A_{(3,3,3,3,5)}$ obsahuje stenovú kružnicu dĺžky 5, preto podľa *Lemy 2.4* na stenové rankingové zafarbenie tohto grafu potrebujeme aspoň 4 farby. Na *Obrázku 30* je stenové rankingové zafarbenie tohto grafu 5 farbami. □

6.14 Ešte jeden pravidelný mnohosten

Existuje ešte jeden pravidelný $(3, 4, 4, 4)$-mnohosten, ktorý nie je archimedovský. Jeho graf je nakreslený na *Obrázku 31*. Objavil ho Ashkinuze (pozri [12]). Pre graf tohto mnohostena sa da dokázať tvrdenie.



Obr. 31: Graf (3,4,4,4)-mnohostena od Ashkinuzeho

Veta 6.14. *Nech A je graf* $(3,4,4,4)$*-mnohostena od Ashkinuzeho. Potom*

$$\chi_{sr}(A) = 4.$$

Dôkaz. Označme vrcholy grafu A tak, ako to je na *Obrázku 29*. Ukážeme, že graf A sa nedá zafarbiť tromi farbami. Keby existovalo také stenové rankingové zafarbenie $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}$ tromi farbami, tak BUNV na vonkajšej stene $\alpha = [u_4, v_4, w_4, x_4]$, by boli zafarbené tromi farbami nasledovne: $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_4) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_4) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_4) = 1$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(x_4) = 3$. Potom nutne $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_3) = 3$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(u_5) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_3) = 2$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(w_5) = 3$ a následne potom aj $\mathfrak{r}_\mathfrak{s}(v_3) = 1$. Pre v_5 neostáva žiadna z troch farieb, lebo susedí s vrcholmi každej z týchto farieb. Zafarbenie štyrmi farbami existuje. Stači zobrať nasledujúce zafarbenie ϕ, ktoré je dané predpisom:

$$\begin{array}{llllll}
\phi(u_1) = 2, & \phi(u_2) = 3, & \phi(u_3) = 1, & \phi(u_4) = 4, & \phi(u_5) = 2, & \phi(u_6) = 4, \\
\phi(v_1) = 1, & \phi(v_2) = 3, & \phi(v_3) = 1, & \phi(v_4) = 3, & \phi(v_5) = 2, & \phi(v_6) = 1, \\
\phi(w_1) = 3, & \phi(w_2) = 2, & \phi(w_3) = 3, & \phi(w_4) = 1, & \phi(w_5) = 2, & \phi(w_6) = 4, \\
\phi(x_1) = 1, & \phi(x_2) = 2, & \phi(x_3) = 3, & \phi(x_4) = 2, & \phi(x_5) = 1, & \phi(x_6) = 4.
\end{array}$$

□

Záver

V tejto práci sme sa venovali problému rankingového zafarbenia grafov. Kôli jeho zložitosti sme sa zaoberali špeciálnou stenovou verziou tohoto problému definovanej na planárnych štruktúrach vnorených do roviny. Silne sa pritom využívajú poznatky o rankingovom zafarbení cesty a kružnice.

Táto práca obsahuje výsledky týkajúce sa stanovenia stenového rankingového čísla χ_{sr} pre niektoré konečné pravidelné rovinné grafy. Konkrétne sme stanovili hodnoty tejto charakteristiky pre grafy Platónskych mnohostenov a grafy Archimedovských mnohostenov. Ďalej práca obsahuje odhady χ_{sr} pravidelných rovinných grafov z niektorých nekonečných tried a aj odhady χ_{sr} grafov, ktoré vieme zostrojiť niektorými jednoduchými konštrukciami z rovinných grafov so známym χ_{sr}.
Porovnali sme stenové rankingové číslo s rankingovým číslom a napríklad aj s cyklickým chromatickým číslom grafu.

Odhady stenového rankingového čísla súvisia s maximálnym vrcholovým stupňom a s logaritmickou funkciou parametra maximálneho stenového stupňa. Pri odhadoch sme využili aj poznatky o regulárnom zafarbení planárnych grafov a chromatické číslo grafu χ_0.

Dosiahnuté výsledky môžeme ďalej využiť pri skúmaní stenového rankingového zafarbenia ďalších planárnych štruktúr vnorených do roviny prípadne aj pri skúmaní rankingového zafarbenia všeobecného grafu.

Zoznam literatúry

[1] M. Behrad, G. Chartrand, *Introduction to the Theory of Graphs*, Allyn and Bacon, Inc. Boston (1971).

[2] E. Bruoth, *On-line Colouring of Graphs*, Doktorandská dizertačná práca, prírodovedecká fakulta UPJŠ, (2008).

[3] K. Budajová, S. Jendroľ, S. Krajči, *Parity vertex colouring of graphs*, manuskript (2007).

[4] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press (1997).

[5] J. Czap, S. Jendroľ, *Colouring vertices of plane graphs under restrictions given by faces*, Discusiones Math. Graph Theory, v tlači.

[6] J. S. Deogun, T. Kloks, D. Kratsch, H. Müller, *On the vertex ranking problem for trapezoid, circular-arc and other graphs*, Discrete Applied Mathematics 98 (1999), (39-63).

[7] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag Heidelberg, New York (2005).

[8] H. Enomoto, M. Horňák, S. Jendroľ, *Cyclic chromatic number of 3-connected plane graphs*, SIAM J. Discrete Math. 14 (2001) 121-137.

[9] M. Horňák, S. Jendroľ, *On a conjecture by Plummer and Toft*, J. Graph Theory 30 (1999) 177-189.

[10] M. Horňák, J. Zlámalová, *Another step towards proving a conjecture by Plummer and Toft*, IM Preprint, series A, No.11/2006 (2006).

[11] S. Jendroľ, Š. Schrötter, *On Rainbowness of semiregular polyhedra*, Czechoslovak Mathematical Journal 58 (2008), 359-380.

[12] E. Jucovič, *Konvexné mnohosteny*, Veda, Bratislava (1981).

[13] M. Katchalski, W. McCuaig, S. Seager, *Ordered colourings*, Discrete Math. 142(1995), 141-154.

[14] Y. L. Lai, Y. M. Chen, *An Improved On-line Node Ranking Algorithm of Trees*, Proceedins of the 23rd Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, 345-348, Taiwan (2007).

[15] D. P. Sanders, Y. Zhao, *A new bound on the cyclic chromatic number*, J. Combin. Theory, Ser. B 83 (2001) 102-111.